НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ГЕОФІЗИКИ ім. С.І. СУББОТІНА

На правах рукопису

УДК 550.831

ДУБОВЕНКО ЮРІЙ ІВАНОВИЧ

ВИЗНАЧЕННЯ КОНТАКТНОЇ ГРАНИЦІ ЗА ЗНАЧЕННЯМИ ПОХІДНИХ ЛОГАРИФМІЧНОГО ПОТЕНЦІАЛА НА ІСТОТНО ОБМЕЖЕНИХ МНОЖИНАХ

(ЛІНЕАРИЗОВАНА ПОСТАНОВКА)

04.00.22 – ГЕОФІЗИКА

ДИСЕРТАЦІЯ НА ЗДОБУТТЯ НАУКОВОГО СТУПЕНЯ

КАНДИДАТА ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИХ НАУК

Науковий керівник
доктор фізико-математичних наук, професор
ЧОРНИЙ АРНОЛЬД ВОЛОДИМИРОВИЧ

КИЇВ – 2005

ЗМІСТ

Світлій пам'яті наукового керівника
А. В. Чорного присвячується…

ВСТУП

Остаточним підсумком гравіметричних досліджень є інтерпретація даних потенціальних полів з метою вивчення глибинної будови Землі. ЇЇ геологічну будову в першому наближенні можна описати шаруватою моделлю середовища що представляє набір розділених контактними границями пластів постійної густини. Шаруватими моделями апроксимують широке коло реальних геологічних об'єктів, цікавих з точки зору як нафтогазової так і рудної геофізики, їх використовують при вивченні осадових товщ, в яких геологічне середовище є комплексом шарів різної густини. Шуканим параметром в таких моделях є характер поведінки і глибина границь розділу пластів, на яких функції густини зазнають розриву. В рамках цих моделей при вирішенні ряду найважливіших геологічних задач структурної геофізики виник особливий клас обернених задач гравірозвідки, в якому проблема побудови контактної гравітуючої поверхні за даними вимірів певної компоненти поля займає провідні позиції і користується заслуженою увагою з моменту свого зародження в 1930-х рр.

Задачам визначення густинних границь розділу однорідних середовищ з тими чи іншими обмеженнями як теоретичного плану так і прикладного (вивчення геометрії глибинних структур земної кори) присвячено безліч праць; у де
яких з них детально викладено історію вивчення проблеми. Наведемо коротку історичну довідку, яка допоможе обгрунтувати актуальність піднятої проблеми.

Актуальність проблеми. При регіональних та детальних пошукових роботах в осадових басейнах одним з етапів кількісної інтерпретації геофізичних даних є побудова контактної гравітуючої поверхні. Математично розв'язання таких задач зводять в підсумку до розв'язання оберненої задачі потенціалу для контактної поверхні. Через використання гармонічних наближень реального розподілу сили тяжіння сфера застосування поставлених задач повинна обмежуватись областями малої міри (не більше 50 км) з неглибоким заляганням джерел (не глибше 10 км). На фоні нарощення глибинності досліджень цей момент звужує клас моделей, для яких можливе адекватне вирішення оберненої задачі. Щоб окреслити зв'язок задачі побудови контактної поверхні з попередніми фундаментальними дослідженнями, вдамось до історії...

Перший етап розвитку теорії контактних задач започаткував в 30-х рр. Б. В. Нумеров розглядом контактної задачі для однієї границі, довівши залежність отриманого ним нелінійного інтегрального рівняння для контакту від надлишкової густини і *середньої глибини* до контакту. Невдовзі М. Р. Малкін модифікував задачу стосовно до косо намагнічених мас, а

О.О. Заморєв знайшов точне обернення оператора цього рівняння в комплексній області за умови, що *контактна границя є скінченною ундуляцією прямої на обмеженому інтервалі*. Зовнішня подібність лівих частин рівнянь Нумерова й Заморєва відіграла визначальну роль у подальшому розвитку теорії попри цікаву осібну працю О. О. Шванка за 1947 р. У цій статті останній зауважив можливість заміни параметра h на значення контакту у точці спостереження, яка дозволяє уникнути властивої нумерівському наближенню контакту залежності від глибини h. Однак, через невпевненість автора і погану формалізацію здогадки, на його нотатки, на жаль, геофізики не звернули належної уваги. Вся наступна бібліографія досі (див. Коментар) свідчить про наближену "лінеаризовану" трактовку контактної задачі в стилі Заморєва. Різноманітні грані проблеми (в т.ч. локальної єдиності розв'язків з обмеженням Заморєва) свого часу вивчали М.О. Алексідзе, Б.О. Андреєв, О.К. Маловичко, В. М. Новоселицький та ін. У цьому напрямку М. Г. Сербуленко та Ю.В. Антонов визначали $n \geq 2$ контактних границь для однорідних шарів, а О.І. Кобрунов і Р.П. Денисюк відшукували границі поділу неоднорідних шарів. Перші результати чисельного розв'язання нелінійного інтегрального рівняння для контакту відносять до періоду повного освоєння методу регуляризації розв'язків некоректно поставлених задач. Їх висвітлено у працях В. Б. Гласко, С.В. Захарова, К.О. Мудрецової, С.М. Оганесяна, В.І. Старостенка та інших.

Інший етап в розвитку теорії плоскої задачі гравіметрії пов'язують з її перебудовою на початку 1960-х років на основі методів теорії функцій комплексної змінної, здійсненою в працях В.К Іванова, В. М. Страхова, О.В. Цирульського, Я.Г. Голіздри, С. В. Шалаєва, В.Г. Чередніченка та інших. Але і на цьому етапі не вирішено усіх проблем – той же Страхов сформулював сімейство невирішених аналітичних проблем, без яких плоска теорія потенціалу не може претендувати на завершеність. Зокрема, існують прогалини у вивченні проблем єдиності розв'язків через відсутність (локальних) компактних класів єдиності розв'язків задач з цілком неперервними операторами, поставлених на нескінченному інтервалі; винятком, може, є лише введена Страховим в комплексній області множина коректності в рамках його концепції ε-еквівалентності розв'язків. Отже, пошук таких обмежень на розв'язки, які б забезпечили їх єдиність і стійкість (тобто можливість), досі залишається актуальним для теорії обернених задач потенціалу.

Поряд з цим у деяких працях Х. Рейнбоя і О.О. Заморєва "лінеаризовану" постановку задачі зведено до аналітичного продовження поля в горизонтальну смугу між поверхнею спостережень та тяжіючими масами, що дозволило застосувати для її вивчення розвинутий апарат аналітичного продовження гармонічних функцій. Зауважмо, що ще Б.В. Нумеров окреслив клас функцій, на якому розв'язок нелінійного інтегрального рівняння для контакту

апроксимується розв’язком лінійного рівняння, одначе у розробках Н.Н. Чорної 1990-х рр. доведено, що запропонований клас *не забезпечує* однозначного вирішення проблеми.

Після праць Б.В. Нумерова питання лінійної оберненої задачі для контакту випало з-під уваги геофізиків; відомі лише роботи М.Р. Малкіна, О.К. Сенька, М.С. Смирнова і Б.О. Андреєва з уточнення лінеаризованого наближення розв’язку Нумерова та комбінація положень Нумерова й Сенька в монографії О.К. Маловичка. Чисельну реалізацію цих уточнень на першому етапі розвитку плоскої теорії потенціалу, за наявного тоді математичного забезпечення, найбільш вдало здійснено в працях Б.О. Андреєва, М.М. Лаврентьєва, а на другому – у В. М. Страхова.

Третій етап розвитку теорії контактних задач умовно почався в кінці 1980-х з удосконаленням обчислювальних методів та машин і певних змін в теорії розв’язання некоректних задач й ознаменувався, у зв’язку з цим, переосмисленням результатів попередніх етапів. Нову трактовку задачі Нумерова у цьому етапі закладено в працях А.В. Чорного, присвячених вирішенню нелінійного інтегрального рівняння для контакту типу Урисона на вдало дібраному ним класі функцій Страхова і способам його лінеаризації, що є точнішою за заморєвську. Чисельний розв’язок цього рівняння наведено в дисертації Н.Н. Чорної. Це послужило відправною точкою для лінеаризованої постановки оберненої задачі для контакту, що пропонується у даній праці. Відчутний вклад в завершення теорії контактних задач останнім часом внесли дослідження О.А. Чорної, Р.П. Денисюка, Ю.В. Антонова (див. Коментар) та інших.

У класичних працях Б.О. Андреєва, М.М. Лаврентьєва і В.М. Страхова розв’язки рівнянь для контактної поверхні не позбавлені параметричної залежності від деякої глибини до контакту (її деталі свого часу окрім Нумерова вивчали В. М. Страхов, Н.Н. Чорна). Така залежність звужує сферу застосувань методів, що ґрунтуються на цих розв’язках, і вражаючих кроків з її подолання, за винятком дисертації Н.Н. Чорної, на даний час не продемонстровано.

Для успішної чисельної реалізації лінеаризованої контактної задачі актуальною є побудова адекватної математичної моделі геологічного середовища, яка допускає точну оцінку і мінімізацію похибок введених апроксимацій розв’язків, отриманих на основі апарату інтегральних зображень аномалій сили тяжіння. Страхов, Цирульський та інші вивели свої рівняння для обмежених тіл, не враховуючи притяжіння шару постійної товщини над тілами. Крім того, у цих рівняннях не обґрунтовано введення необмежених інтегральних границь замість цілком визначених у Заморєва. Через це та невисоку швидкість збіжності чисельні розв’язки лінійної контактної задачі на сьогодні не задовольняють зрослим вимогам до результатів інтерпретації. Швидкість та достовірність інформації в умовах недовизначеності та наявності неліквідних зовнішніх перешкод визначає практичний успіх пошуків, тому

назріла потреба в новому вирішенні “лінеаризованого” наближення Б.В. Нумерова та інших наближень.

За нинішньої ситуації становлення “комп’ютерної епохи” в інтерпретації потенціальних полів створення ефективних і швидкодіючих машинних алгоритмів розв’язання обернених задач не потребує обґрунтувань, а новітні зміни у класичній теорії вирішення лінійних некоректних задач відкривають широку дорогу для появи нового, досі небаченого класу алгоритмів розв’язання контактних задач. Окреслені у цьому короткому нарисі проблеми плоскої теорії потенціалу в загальній картині наукових досягнень за період її багаторічного розвитку доводять актуальність поставленої проблеми.

Мета дисертаційної роботи – подальша розробка основ “лінеаризованої” постановки оберненої структурної задачі логарифмічного потенціалу, закладеної Б.В. Нумеровим, у вигляді системи певних інтегральних зображень в класі неперервних разом з першими похідними функцій для границі поділу однорідних пластів різної густини в умовах задання вхідних даних на *істотно обмежених* множинах, доведення їх єдиності і стійкості та розробка дієвих алгоритгоритмів їх чисельного розв’язання на ПК в локальній області в рамках теорії регуляризації некоректно поставлених задач. Для цього сплановано такі кроки.

Основні задачі досліджень:

1. Визначення інтегральних співвідношень для “лінеаризованої” оберненої задачі структурної гравіметрії та класу єдиності її розв’язків за умов збурених похибками вхідних даних у рамках теорії наближеного вирішення умовно коректних задач.

2. Аналіз характерних властивостей “лінеаризованого” інтегрального рівняння для контакту, яке дає розв’язок оберненої задачі, узгоджений з даними про похибки вхідних даних, та окреслення у загальних рисах стратегії пошуку розв’язку оберненої задачі.

3. Конструктивне з’ясування необхідних і достатніх умов однозначного розв’язання задачі в аналітичному вигляді за умов малих збурень.

4. Реконструкція пропозицій М.Р. Малкіна, О.К. Сенька і Б.О. Андреєва щодо уточнення наближень Нумерова на базі сучасних уявлень про розв’язання некоректних задач з відповідною корекцією згідно умов поставленої задачі.

5. Розробка стійких регуляризуючих алгоритмів розв’язку задачі на основі ітераційних процесів Б.О. Андреєва, М.М. Лаврентьєва, А.В. Чорного для неперервного поля, заданого як на *необмежених* так і *обмежених* множинах, враховуючи сучасні досягнення математичної геофізики .

6. Розробка алгоритмів, в яких уникнуто залежності розв’язку від деякої *середньої глибини* до поверхні контакту та програмного забезпечення для пп. 5-6.

7. Перевірка якості і надійності отриманих алгоритмів на тестових даних та вивчення

впливу похибок методу і вхідних даних на точність відновлення контакту.

Наукова новизна розробок ґарантується розвитком цілковито нової постановки задачі для контактної поверхні, що розширює можливості інтерпретації даних гравіметрії у рамках плоскої теорії потенціалу, отриманих з *істотно обмежених* інтервалів. Зокрема, вперше:

1. Отримано ряд нових лінеаризованих рівнянь першого роду, які пов’язують задану функцію контакту двох необмежених однорідних пластів з вертикальною похідною потенціалу сили тяжіння; їх узагальнені варіанти позбавлені параметричної залежності від деякої *середньої глибини* до контакту.

2. Описано множину коректності та визначено умови коректного вирішення отриманих розв’язків лінійних інтегральних рівнянь за різних умов задання вхідних даних (в т.ч. на *істотно обмежених* множинах).

3. Удосконалено способи уточнення лінеаризованих наближень контакту М. Р. Малкіна, О.К. Сенька та Нумерова-Маловичка з відповідною корекцією щодо постановки задачі.

4. Запропоновано відповідні стійкі швидкозбіжні ітераційні процеси Лаврентьєва-Андреєва і Лаврентьєва-Чорного пошуку наближених розв’язків рівнянь для контакту на новому базисі теорії узагальнених функцій та еквівалентних перетворень (новий спосіб доведення теорем існування).та досліджено їх збіжність.

5. На основі математичних ідей А.М. Тихонова, М.М. Лаврентьєва і А.В. Чорного збудовано стійкі швидкозбіжні ітераційні процеси, позбавлені параметричної залежності від *середньої глибини* до контакту.

6. Створено регулярні чисельні алгоритми на основі вищезгаданих ітерацій із застосуванням стійкої до похибок округлень методики А.В. Чорного за типових обмежень на параметри середовища і поля.

Достовірність та обґрунтованість розробок підкріплено ретельним та строгим теоретичним аналізом математичної моделі і методології вирішення поставленої задачі за допомогою методів функціонального аналізу, теорій потенціалу, узагальнених функцій та розв’язку некоректних задач. При викладенні отриманих результатів використано достовірні положення обчислювальної математики, методик програмування й інтерпретації геофізичних полів, апробовані результати попередніх досліджень в цій області. Крім того, достовірність результатів обґрунтовано їх співставленням з раніше відомими для даного класу задач та апробацією на комплексі простих тестових прикладів.

Практична цінність теоретично обґрунтованого лінеаризованого інтегрального зображення контактної задачі зводиться до поповнення арсеналу тех.нології підбору програмним пакетом регуляризованих алгоритмів для швидкого і надійного виділення контактних границь однорідних середовищ за умов задання поля на *необмежених* та *істотно*

обмежених множинах; це, окрім практичної цінності, має і загальнометодологічне значення.

Апробація роботи. Положення досліджень, що несуть основне смислове навантаження та результати чисельного моделювання, доповідались на 28-й сесії Міжнародного семінару ім. Д.Г. Успенського “Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей” (м. Київ, 29 січня – 2 лютого 2001 р.), на II-й Міжнародній конференції “Геофизический мониторинг опасных геологических процессов и экологического состояния геологической среды” (м. Київ, 8 – 10 жовтня 2001 р.).

Публікації. За темою дисертаційного дослідження опубліковано 4 друковані праці у фахових наукових журналах “Доповіді НАН України” та “Геофізичному журналі” та дві тези доповідей у збірках тез наукових конференцій.

Структура і обсяг роботи. Дисертація складається із вступу, чотирьох розділів, висновку, переліку використаної літератури, бібліографічного коментаря та двох додатків. Загальний обсяг роботи: 200 сторінок, в тому числі 167 найменувань літературних джерел, 30 малюнків та 3 таблиці, обсяг додатків – 26 сторінок.

У даній праці викладено результати дослідження практично важливої прикладної задачі визначення контактної границі поділу двох однорідних середовищ за значеннями похідних логарифмічного потенціалу, заданих на *істотно обмежених* множинах. Цю, загалом некоректну, задачу в рамках методу регуляризації А. М. Тихонова зведено до наближеного вирішення ряду інтегральних рівнянь 1-го роду зі стабілізацією чисельного розв’язку щодо похибок округлень значень оператора і правої частини відповідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь за методикою А.В. Чорного.

У структурі дисертації виділяється чотири розділи. Дослідження внутрішньої будови Землі здійснено на основі вивчення її математичної моделі, виведеної з інтегрального подання фундаментального закону взаємодії поля й середовища – аспектам такої моделі та її місцю серед інших задач присвячено перший розділ. У другому розділі викладено методи ітераційного розв’язання лінійних рівнянь контакту для “континуального” задання поля та їх узагальнених модифікацій, незалежних від апріорі невідомого параметра h, дано аналіз їх збіжності на основі певних еквівалентних перетворень, наведено оригінальний алгоритм екстраполяції поля при відновленні контакту за традиційною схемою з ядром Пуассона. Третій розділ присвячено методиці вирішення лінійних рівнянь для контакту із швидко спадаючими ядрами, призначених для відновлення контакту за полем, заданим на *істотно обмежених* профілях, проаналізовано особливості збіжності відповідних ітерацій на введеному класі Нумерова та характер застосування; наведено нову процедуру прискорення ітерацій. У четвертому розділі окреслено загальну стратегію вирішення некоректних задач, здійснено алгебраїзацію запропонованих алгоритмів і наведено у рамках регуляризації за Тихоновим методику чисельного розв’язання лінійного інтегрального рівняння Фредгольма першого роду, до вирішення якого зведено всі досліджувані процеси. Подано результати чисельного тестування на комп’ютері та порівняльного аналізу тестових прикладів, отриманих за різними

алгоритмами.

Значну частину проробленої роботи склала розробка й тестування пакету програм для обчислень на комп'ютері наближених розв'язків поставленої задачі (одновимірних лінійних інтегральних рівнянь першого роду) на рівномірній мережі вузлів. У додатку Б наведено програмний код, відкритий для подальшого удосконалення.

Детальну історію досліджень проблеми заради спрощення і стрункості викладу подано в бібліографічному коментарі наприкінці рукопису. *Чисельному* розв'язанню рівнянь 1-го роду присвячено другу частину коментаря з переліком додаткової літератури для зацікавлених.

Особистий внесок. В основу дисертації покладено результати досліджень, виконаних автором у відділі глибинних процесів Землі і гравіметрії Інституту геофізики НАН України за планом наукових робіт на 1996-2000-й рр. (№ держ. рег. 0196 U 004 773) та 2001-2005 рр. (№ держ. рег. 0101 U 000286) під керівництвом доктора фіз.-мат. наук, професора А.В. Чорного. Самостійно отримано результати, що описані у всіх розділах, за винятком п.п. 1.2.3, 2.1, 2.5, 3.3. Окремі зображення ітераційних процесів для обчислення наближень контакту (пп. 2.4, 3.1), дослідження їх властивостей (п. 1.3.1) та умов існування розв'язку (п. 2.3.1) задачі запозичено з попередніх публікації А.В. Чорного. Результати, отримані в п.п 4.2, 4.3, розвинуто на основі спільних з ним публікацій.

Раціональне формулювання змістовної моделі задачі, її оптимальна у деякому смислі параметризація, створення на основі алгоритмів з мінімізацією похибок пакету гнучких швидкодіючих програм, тестові обчислення і аналіз роботи алгоритмів є власною заслугою автора. Наукові інтереси автора формувались у процесі плідної співпраці з науковим керівником А.В. Чорним, якого автор шанує як вчителя і щиро вдячний за діяльну участь, навчання й цінні поради на всіх етапах роботи, які допомогли вийти за межі власних пристрастей й інтересів, а також під впливом ідей В.М. Страхова, М.О. Алексідзе, що певною мірою позначилось на стилі викладу. Автор воліє висловити глибоку вдячність академіку В.І. Старостенку за увагу і всебічну підтримку, складає глибоку подяку докторам фіз.-мат. наук В. М. Шуману, І.М. Корчагіну та канд. фіз.-мат. наук А.М. Тупчієнку за консультації на заключному етапі, канд. фіз.-мат. наук О.В. Легостаєвій, канд. геол.-мін. наук Т.П. Єгоровій і наук. співробітнику К.П. Барановій за щире ставлення та сприяння у підготовці цієї праці. Окремо варто подякувати сім'ї та дружині Владиславі за розуміння і терпіння.

РОЗДІЛ 1

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЛІНЕАРИЗОВАНОЇ ЗАДАЧІ ВИЗНАЧЕННЯ КОНТАКТУ

Проаналізовано основні математичні моделі оберненої задачі логарифмічного потенціалу для контактної

поверхні. Сформульовано математичну модель і поставлено контактну задачу за умов задання похідних логарифмічного потенціалу на необмежених та *істотно обмежених* множинах при постійній густині шарів. Для її розв'язання виведено лінійні інтегральні рівняння з операторами, що швидко спадають. Описано клас єдиності розв'язків цих рівнянь і властивості відповідних лінійних операторів.

DE MINIMUS LEX NON CURAT

Вивчення закономірностей глибинного розподілу корисних копалин, що є однією з головних задач гравіметрії, неможливе без побудови змістовних структурних моделей земної кори і мантії. Одним з етапів такої побудови є визначення контактної границі поділу двох однорідних середовищ за аномальним зовнішнім потенціалом шляхом вирішення оберненої задачі – задачі обчислення характеристик середовища, які зумовили дане поле, за значеннями цього поля (певного функціоналу над ним), заданими на деякій множині (фізичній поверхні Землі). Обернені задачі потенціалу є основними математичними моделями для якнайточнішого відновлення внутрішньої будови Землі засобами гравіметрії. У сучасному природознавстві математична модель є основним джерелом нових знань, і роль абстракції зростає з мірою ускладнення досліджуваних об'єктів. Відбір моделей здійснюють, виходячи з варіаційних принципів (можливих реалізацій), фундаментальних законів збереження і емпіричних міркувань. Для замикання моделі вводять рівняння, які описують граничні умови і зовнішні збурення. Одначе, як зауважено в [13], в розвідувальній геофізиці математична модель – не самоціль, а лише засіб пізнання середовища, тому оцінки її параметрів в загальному контексті інтерпретації не абсолютні. Вибір оптимальної моделі інтерпретації лишається однією з найскладніших методологічних проблем .

Незважаючи на тенденцію до деталізації фізичних характеристик середовища, в геологічній практиці зберегли актуальність усереднені (інтегральні) характеристики, здобуті з непрямих проявів в фізичних полях. Традиційною для обернених структурних задач гравіметрії, які полягають у знаходженні густинних границь за спостереженим полем сили тяжіння та деякою сукупністю апріорних даних, є пластова модель суцільного середовища. Беручи її за основу, позначмо через D деяку відкриту множину в евклідовому просторі $R^{(n)}$ точок $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, на якій задано характеристику контакту $\zeta=\zeta(x)$ збурювального тіла; назвімо цю пару (ζ,D) *джерелом* поля $U(x;\zeta,D)$, $x\in E\subset R^{(n)}$, причому *фінітним*, якщо множина D обмежена. Приступаючи до вивчення елементарної оберненої задачі визначення контактної границі ∂D множини D в площині $R^{(n)}$ за значеннями вертикальної похідної *логарифмічного потенціалу*, заданої на *необмеженій* та *істотно обмеженій* множинах, скористаймось ідеалізацією у вигляді необмежених однорідних пластів постійної обмеженої густини[1]. Вважатимем неперервними функції, що описують середовище і поле. Таку

[1] Попри ідеалізацію, постійна густина досить часто фігурує в практичних розрахунках за відсутності об'єктивних даних про її зміну всередині пласта.

математичну модель середовища ми вважаєм вихідною для дослідження методами функціонального аналізу [43, 45, 54, 124] задачі визначення контакту.

Обернену задачу потенціалу для контактної поверхні сформульовано давно і досліджено у численній геофізичній літературі, яка постійно поновлюється. Проте досі не з'ясовано, з якими ж особливостями задачі пов'язано розмаїття її описів: з неозорою множиною моделей задачі чи з наявністю важких для досліджень теоретичних проблем її розв'язності, або ж із трудношами чисельної реалізації її розв'язків, що трапляються в практиці. У літературі відсутній детальний аналіз постановок цієї задачі і методів її розв'язування, з якого випливала б відповідь на поставлене питання, тому спробуємо з'ясувати наявну ситуацію[2]. Перш, ніж перейти до якісного аналізу основних, на мою думку, праць, що проливають світло на стан і рівень вивченості математичної моделі задачі, введемо деякі загальні конструкції.

1.1. Постановка задачі та основні конструкції

1.1.1 Модель середовища. Визначмо детальніше предметну модель досліджуваної задачі. Оберімо її як найпростішу геологічну модель з двох горизонтальних, необмежених, складених породами постійної густини σ_i, $i=1,2$ деформованих пластів, що залягають один над одним. Нехай між пластами визначено перепад густини через $0<\sigma=\sigma_1-\sigma_2$, тоді під гравітуючими масами розуміємо маси, розподілені з додатною густиною σ^+ в другому пласті чи з від'ємною σ^- – в першому. Позначмо через $\overline{D}_i = D_i \bigcup \partial D_i$, $i=1,2$ необмежені замкнуті області, що містять тяжіючі маси й занурені в евклідовий простір $R^{(3)}$. Припустімо, що границі ∂D_i цих областей тотожно співпадають відповідно з крівлями першого й другого пластів; тоді гравітаційний вплив розглядуваної моделі буде еквівалентним ефекту або від області $D=D_1 \setminus D_2$, або області D_2, що містять розподіли мас густиною σ^- чи σ^+ відповідно (вплив контакту ∂D_2 означає і вплив мас області D_2). Вивчаючи гравіефект області D вважаємо, що її границя $\partial D=\partial D_1 \bigcup \partial D_2$ кусково-неперервна, а сама область досить мала за розмірами, щоб задовольняти умові гармонічної апроксимації потенціалу [153]:

$$\max_{x \in D}\left|\frac{\partial W(x)}{\partial \nu}-\frac{\partial W(x)}{\partial x_2}\right| \le \varepsilon > 0, \qquad (1.1)$$

де $W(x)=W(x;\sigma_n,D)$ – збурювальний потенціал сили тяжіння; $\nu=\nu(x)$ – внутрішня нормаль до поверхні рівня $U(x;\sigma_0,D_0)$ нормального потенціалу $U(x)$ у точці x; мале число ε – точність гармонічної апроксимації аномалії. Припустімо, що складові границі ∂D_i – досить гладкі (тобто існує хоча б один напрям, в якому кожна пряма з пучка паралельних прямих перетинає

---

[2] Звичайно, без вичерпного огляду усієї літератури, що стосується з тією чи іншою мірою повноти і строгості проблем коректної розв'язності і чисельної реалізації розв'язків задачі для контактної поверхні і вивчення ефективності їх використання для тлумачення природи гравітаційних та магнітних аномалій.

поверхні ∂D_1 і ∂D_2 в єдиній точці), що є звичайним явищем в практиці інтерпретації; їх геологічним прообразом може бути, наприклад, рельєф фундаменту чи структурні горизонти осадового чохла, границі Мохо, Конрада і т. п. Таке спрощення передбачає простий аналітичний опис границі.

***Зауваження* 1.1**. Компоненти ∂D_1 в прийнятих позначеннях описують земний рельєф регіону, а ∂D_2 – рельєф відновлюваного контакту; земний рельєф внаслідок його детальної вивченості методами геодезії вважаємо заданим. Не порушуючи загальності міркувань, вважаємо, що поверхня ∂D_1, яка співпадає з земним рельєфом, не надто сильно ухиляється від площини (в іншому разі попередньо слід виконати відповідні редукції [1,5,12]).

З урахуванням цих зауважень перейдемо до аналітичного опису границі, попередньо зафіксувавши систему координат, що дозволяє повніше задіяти необхідну інформацію і ввести зручну схему позначень. Зважаючи на умову (1.1), для нашої моделі найзручнішою видається прямокутна декартова система координат, яка розділяє евклідовий простір R^3 на "верхній" $R^+ = R^{(3)} \setminus \overline{D_1}$ та "нижній" $R^- = R^{(3)} \setminus R^+$ напівпростори, які розрізняються наявністю чи відсутністю тяжіючих мас. Зорієнтуймо систему координат $Ox_i, i = \overline{1,3}$ так, щоб вісь Ox_3 спрямувати в напрямку тяжіючого шару, а площина Ox_1x_2 щонайліпше апроксимувала поверхню ∂D_1. Заради простоти домовимось, що з відомою мірою наближення площина $x_3 = 0$ апроксимує поверхню ∂D_1 і є її рівнянням на тій підставі, що відомими редукціями завжди можна звести виміряні значення сили тяжіння на рівень моря. Введімо позначення, в яких точки простору $R^{(3)}$ запишуться малими буквами; їх координати відрізнятимуться лиш відповідними індексами. Розрізняючи точки, власне, області $\overline{D}$ та її доповнення $CD = R^{(3)} \setminus \overline{D}$, позначмо перші грецькими, $\xi(\xi_i) \in D$, а другі – латинськими літерами $x(x_i) \in CD, i = \overline{1,3}$. Ілюстрацією зручності і компактності такої схеми позначень слугуватиме міра евклідового простору: $|\xi - x| = \sqrt{\sum_{k=1}^{3} (\xi_k - x_k)^2}$.

У введених позначеннях для границі $\partial D = \partial D_1 \cup \partial D_2$ області D, що об'єднує поверхні контакту ∂D_2 й земного рельєфу ∂D_1, справедливий аналітичний опис у вигляді

$$\partial D_1 : x_3 = 0; \partial D_2 : \xi_3 = \xi_3(\xi_1, \xi_2) = \zeta(\xi_1, \xi_2),$$

де $\zeta(\xi_1, \xi_2)$ – однозначна функція, неперервна разом із своїми першими похідними за будь-яких значень ξ_1 і ξ_2. Через некоректність поставленої задачі доцільно довизначити предметну модель середовища. Припустімо, що властивості геологічних утворень всередині збурювальної області D змінюються, за винятком одного напрямку, в усіх площинах, паралельних осі Ox_3, а в площині $x_3 = 0$ вони незмінні вздовж одного з напрямів; іншими словами, вважаймо, що складову ∂D_2 границі ∂D області D добре апроксимує циліндрична поверхня з твірними, паралельними осі Ox_2, а функція $\sigma(\xi), \xi \in D$ розподілу густин тіл в D не

залежить від координати ξ_2. В цій ситуації границю контакту визначатиме направляюча $\zeta = \zeta(\xi_1)$, $\xi_1 \in R^{(1)}$ циліндричної поверхні ∂D_2, що є простою, без самоперетинів гладкою кривою; надалі криву $\zeta(\xi_1)$ називатимемо **контактною поверхнею** або **границею**, а задачу її визначення – ***контактною задачею*.**

Отже, модель геологічної будови – це два однорідні циліндричні пласти порід різної густини, що залягають один над одним і зорієнтовані так, що твірні циліндра паралельні осі Ox_2; математично таку модель середовища описує клас двовимірних необмежених однозв'язних тіл постійної густини σ, зірчастих щодо нескінченно віддаленої точки і обмежених смугою (рис. 1.1). Додаймо несуттєве обмеження функцій контакту $\zeta(x), x \in R^{(1)}$, вважаючи їх відділеними від нульового рівня – земної поверхні: $0 < h_1 \le \zeta(x) \le h_0, -\infty < x < \infty$.

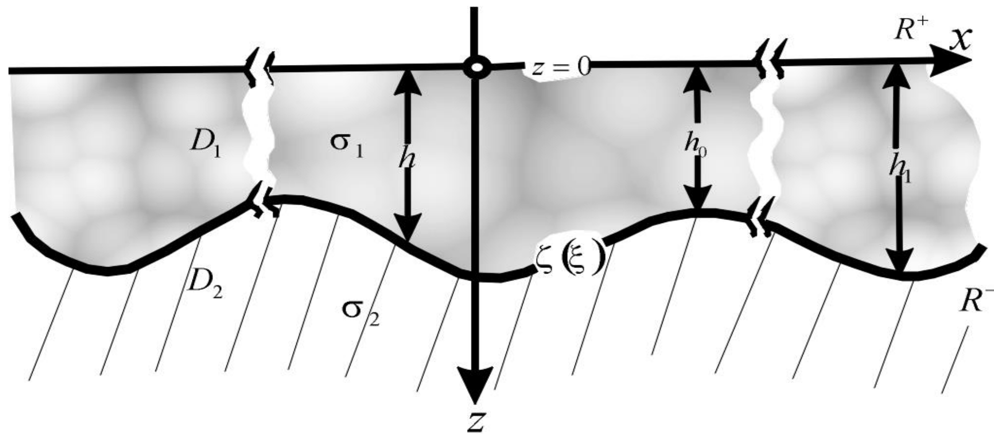


Рис. 1.1. Предметна модель: контактна поверхня порід з різною густиною.

За означених умов (відома аномальна густина σ й середня глибина *h* залягання контакту) за аномаліями сили тяжіння можна визначити контакт, якщо його рельєф простий, гладкий і виразний.

1.1.2. Модель аномального поля. Підвалиною постановки та вирішення будь-якої задачі гравіметрії є витокоподібне аналітичне зображення корисного сигналу у спостереженому полі у вигляді

$$U_k(x) = \int_D \left(\sum_{m=1}^{M} \zeta_m(\xi) K_{km}(\xi) \right) d\xi, \;\; k = 1,2,...m, \;\;\; K_{km}(\xi) \in L(D),\; U_{x_k}(x) \in \mathrm{B}(\mathrm{CD}),$$

який дозволяє сформулювати варіаційні принципи відбору можливих розв'язків $\zeta_{\square}(\xi)$. Згідно цієї ідеї, для постановки плоскої контактної задачі на основі введеної вище моделі середовища застосовують [57, 93, с. 204] двовимірний аналог рівняння, що пов'язує параметри (σ, ζ) середовища й поля

$$U_{x_3}(x) = \frac{\partial U(x)}{\partial x_3} = 2\gamma \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_1 \int_0^{\zeta(\xi_1)} \sigma(\xi_1, \xi_2) \frac{\xi_3 - x_3}{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2} d\xi_2 \, . \qquad (1.2)$$

Це поле є вертикальною похідною логарифмічного потенціалу

$$U(x)=2\gamma\int_D\sigma(\xi)\ln\frac{1}{|\xi-x|}d\xi\,, \qquad (1.3)$$

який ґенерується всюди в D масами $dm(\xi)=\sigma(\xi)d\xi$ з густиною $\sigma(\xi)$, зосередженими в області $D=\{<\xi>;\xi_1\in R^{(1)};0\le\xi_2\le\zeta(\xi_1)\}$; тут $d\xi=d\xi_1 d\xi_2$, γ – гравітаційна стала, а задля спрощення запису напрям осі $O\xi$ перейменовано в напрям $O\xi_2$ при тій же схемі позначень, і $|\xi-x|=\sqrt{(\xi_1-x_1)^2+(\xi_2-x_2)^2}$. У такому разі обернену задачу можна формально задати наступним чином:

→ відновити положення контактної поверхні L, формально описаної рівнянням $\zeta(\xi),\xi\in R^{(1)}$, за заданим полем сили тяжіння (1.3) і відомим перепадом густини.

Таку задачу (її називають оберненою задачею логарифмічного потенціалу для контактної поверхні) у різних постановках і для різних класів єдиності вивчали видатні геофізики О.О. Заморєв [36], А.М. Тихонов [122], М.М. Лаврентьєв [50, 51], О.І. Прилєпко [70, 71], В.М. Страхов [109], А.В. Чорний [93, 147] та деякі інші.

***Зауваження* 1.2.** Збудувати модель оберненої задачі для контакту безпосередньо на основі логарифмічного потенціалу неможливо через розбіжність інтегралу, який його зображує [142, с. 22].

***Зауваження* 1.3.** Кожне із співвідношень (1.2) із заданою на множині єдиності (наприклад на ∂D_1) правою частиною $U_{x_k}(x), x\in\partial D_1, k=1{,}2$ є загалом нелінійним інтегральним рівнянням 1-го роду типу Урисона [125] щодо пари (σ,ζ) шуканих функцій. Для існування інтеграла (1.2) достатньо, щоб густина $\sigma(\xi),\ \xi\in D$ була обмеженою й майже всюди локально інтегровною [126], а функція, що описує контакт $\zeta(\xi),\xi\in R^{(2)}$ – принаймні неперервною за Гельдером:

$$|\zeta(\xi)-\zeta(x)|\le C\,|\xi-x|^{\alpha},\ \ 0\le\alpha\le1,\ \ x,\xi\in R^{(2)},$$

де C – напевне визначена константа.

Забігаючи наперед, скажемо, що загалом подібну задачу зводять до розв’язання нелінійного рівняння [142]

$$\zeta(x)-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{(\xi-x)^2+\zeta^2(x)}{(\xi-x)^2+\zeta^2(\xi)}d\xi=u(x),\ u(x)=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial U(x,0)}{\partial x_2} \qquad (1.4)$$

із значеннями поля (правої частини), заданими на необмеженій множині. Прямий оператор для цього рівняння визначено як $\mathbf{A}:St^{(0,\alpha)}(\sigma,D)\to\mathbf{B}(CD)$, а обернений – у вигляді $\mathbf{A}^{-1}:\mathbf{B}_0(\partial D_1)\to St^{(k,\alpha)}(\sigma,D), k\ge0,\quad St^{(k,\alpha)}\subset St^{(0,\alpha)}, \mathbf{B}_0(\partial D_1)\subset\mathbf{B}(CD)$, де $\mathbf{B}(CD)$ – простір “витокоподібно” представлених функцій виміряного поля (1.2), а $St^{(0,\alpha)}(\sigma,D)=S_{loc}(D)\times C^{(0,\alpha)}(R^{(2)})$ – множина фізичних параметрів досліджуваного середовища, обмеженого класом функцій Страхова – сукупністю класу обмежених й майже всюди локально інтегровних функцій густини $\sigma(\xi),\xi\in D$ й класу неперервних за Гельдером обмежених функцій контакту $\zeta(\xi),\xi\in R^{(1)}$. Властивості зображення (1.4) детально розглянуто у працях [93, 94, 142]. Відзначмо, що за точного задання функція $U_{x_k}(x)$ нескінченно

диференційовна, а будучи виміряною з похибками, взагалі кажучи, не є такою, тобто задача (1.4) є умовно коректною; такі задачі успішно вирішують в рамках регуляризації за Тихоновим [54, 65, 70, 101, 140, 142] на основі детального вивчення властивостей відповідного інтеґрального подання методами функціонального аналізу [21, 22, 28, 43, 45]. Вираз (1.4) для визначення контакту $\zeta(\xi_1)$ за виміряними значеннями вертикальної складової напруженості поля й постійною заданою густиною аномальних мас є джерелом постановки лінеаризованої задачі. Цей частинний випадок – *задача визначення контактної границі* $\zeta(\xi_1)$, $\xi_1 \in R^{(1)}$ *поділу двох середовищ із відомим перепадом густини* σ *за значеннями вертикальної складової* $U_{x_2}(x)$ *напруженості поля, заданими на обмежених й необмежених множинах* (їх означення введемо згодом) і є предметом нашого дослідження. Щоб конкретизувати постановку, повернемось до витоків задачі.

1.1.3. Основні моделі контактної задачі. В структурній гравіметрії взагалі відомі чотири основні постановки (моделі середовища) обернених контактних задач. Назвемо їх іменами "засновників" – моделі Нумерова, Заморєва, Маловичка і Страхова і охарактеризуємо кожну з них. Уперше спосіб тлумачення аномалій сили тяжіння шляхом відновлення однієї контактної границі запропонував Б.В. Нумеров у 1930 р. Він сформулював і наближено розв'язав задачу про відновлення межі поділу двох однорідних середовищ у такій постановці [64].

Нехай *під плоскою поверхнею Землі* $\partial D_1 :\ y = 0$ *є одна контактна границя* $\partial D_2 :\ \zeta = \zeta(x)$, $-\infty < x < \infty$, *що розділяє однорідні шари легких "верхніх" порід із густиною* $\sigma_1 = const$ *від важчих "нижніх" порід із густиною* $\sigma_2 = const$. Окрім різниці густин $\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$ порід *задано значення сили тяжіння* $U_y(x,0)$, $-\infty < x < \infty$, *і віддаль* $h = \zeta(x^*)$ *між поверхнями* ∂D_1 *і* ∂D_2 у певній точці x^*, яку відраховують за нормаллю до ∂D_1 (рис. 1.2). За цими вихідними даними *потрібно визначити "поверхню"* ∂D_2, *припустивши, що невідома функція* $\zeta = \zeta(x)$, *яка описує межу поділу, є однозначною й обмеженою.* Відновімо його міркування, спочатку для просторового випадку.

Просторова трактовка задачі. Обернена задача відшукання значень нелінійного рівняння (1.4) загалом нестійка [146, с. 148].

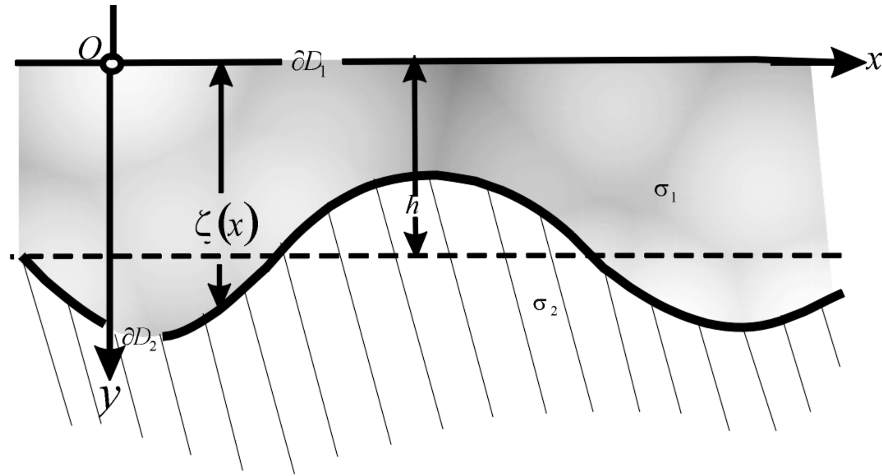


Рис. 1.2. Модель контакту за Нумеровим.

Але це рівняння можна лінеаризувати, скориставшись напрацьованою в [157, с. 362, 374] методикою. Нехай рис. 1.3 дає вертикальний розріз тривимірних мас; проекцію їх на площину xOy позначмо через S. Нехай зверху маси обме-

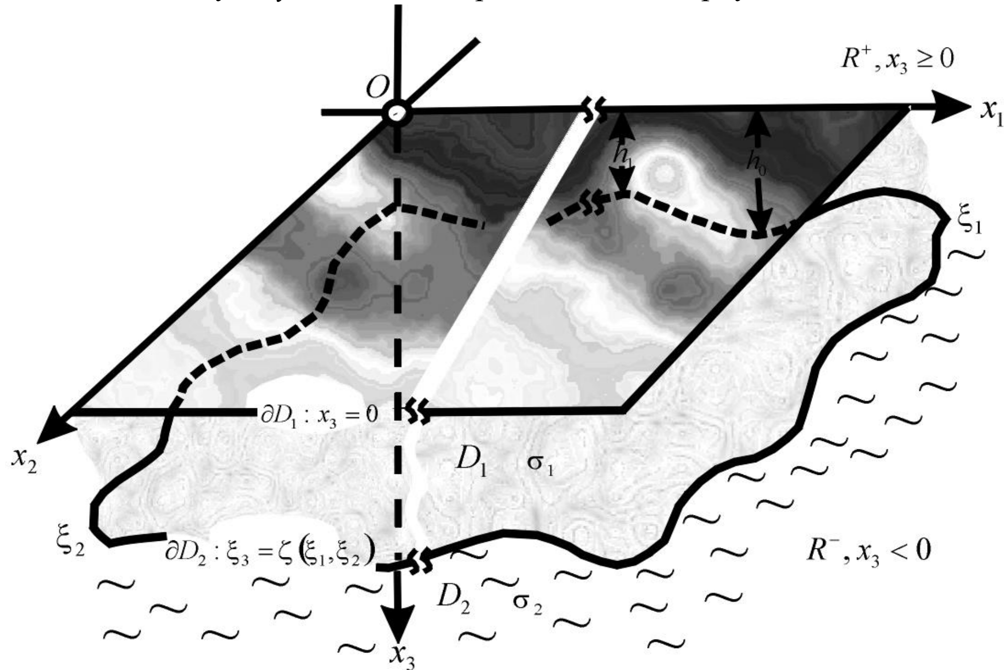


Рис.1.3. Просторовий вигляд моделі контакту.

жені певною відомою поверхнею $H(\xi,\eta)$, а знизу – шуканою контактною поверхнею $\zeta(\xi,\eta)$. Гравітаційний ефект від таких мас матиме вигляд

$$V_z(x,y,z) = \gamma\sigma\iint_S d\xi d\eta \int_{\zeta=H(\xi,\eta)}^{\zeta(\xi,\eta)} \frac{(\zeta - z)}{r^3} d\zeta, \tag{1.5}$$

де γ – гравітаційна стала; $r^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2$; x, y, z – координати точок спостережень, причому $z \leq 0$, якщо не обумовлено протилежне; а ξ, η, ζ – координати точок аномальних мас.

Виконуючи в (1.5) інтегрування по ζ, та допустивши в цьому рівнянні, що $H(\xi,\eta)=0$, а область інтегрування S нескінченна в напрямках ξ й η, отримуємо інтегральне рівняння відносно $\zeta(\xi,\eta)$ для першої постановки задачі – просторовий варіант моделі Нумерова (рис.1.2)

$$-\gamma\sigma\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{r}\Big|_{\zeta=0}^{\zeta(\xi,\eta)}d\xi d\eta=V_z(x,y,z) \qquad (1.6)$$

Задля локалізації особливості цього інтегралу в точках $\zeta=z=0$, $\xi=x$ та $\eta=y$ розіб’ємо інтервал інтегрування надвоє: $[0,\zeta(x,y)]$ та $[\zeta(x,y),\zeta(\xi,\eta)]$ й врахуємо, що означений інтеграл

$$-\gamma\sigma\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{r}\Big|_{\zeta=0}^{\zeta(x,y)}d\xi d\eta=2\pi\gamma\sigma\zeta(x,y)$$

описує поле сили тяжіння $V_z(x,y)$, створене нескінченним горизонтальним плоскопаралельним шаром потужністю $\zeta(x,y)$ й густиною σ. Зауважмо, що при обчисленні останнього інтегралу основне ускладнення полягає в розкритті невизначеності, що виникає; в гравіметричній літературі відомо декілька прийомів її розкриття [157, с. 69, 74; 29, с. 302].

Виконавши вказане розбиття інтервалу інтегрування по ζ, з відношення (1.6) отримаємо інтегральне рівняння контактної поверхні $\zeta(\xi,\eta)$ у постановці Нумерова

$$2\pi\gamma\sigma\zeta(x,y)-\gamma\sigma\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{r}\Big|_{\zeta=\zeta(x,y)}^{\zeta(\xi,\eta)}d\xi d\eta=V_z(x,y,z).$$

З цього рівняння після нескладних спрощень в підсумку отримаємо для обох постановок – Нумерова й Заморєва – наступні вирази

$$\gamma\sigma\iint_S\frac{[H(\xi,\eta)-z]\cdot u(\xi,\eta)}{\left\{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+[H(\xi,\eta)-z]^2\right\}^{3/2}}d\xi d\eta=V_z(x,y,z),\ u(\xi,\eta)=\zeta(\xi,\eta)-H(\xi,\eta), \qquad (1.7)$$

$$2\pi\gamma\sigma\zeta(x,y)+\gamma\sigma\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{[\zeta(x,y)-z]\cdot u(x,y,\xi,\eta)}{\left\{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+[\zeta(x,y)-z]^2\right\}^{3/2}}d\xi d\eta=V_z(x,y,z), \qquad (1.8)$$

$$u(x,y,\xi,\eta)=\zeta(\xi,\eta)-\zeta(x,y).$$

Рівняння (1.7) і (1.8) справедливі з точністю до членів другого порядку малості за умови $\frac{u}{H-z}<<1$, де $H=H(\xi,\eta)$ чи $H=\zeta(x,y)$, відповідно. Рівняння (1.7) – лінійне, а рівняння (1.8) переходить в лінійне, якщо звести його до формулювання Б.В. Нумерова й спростити вигляд. Поклавши $\zeta(x,y)=h$ й $z=0$ та врахувавши відношення [58, 157]

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{\left[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+h^2\right]^{3/2}}d\xi d\eta=1,$$

для $h\in\left[h^-,h^+\right]$, де $h^-=\min\zeta(\xi,\eta)$, $h^+=\max\zeta(\xi,\eta)$ з виразу (1.8) отримаємо двовимір не лінійне інтегральне рівняння Фредгольма 1-го роду для контактної поверхні з ядром Пуассона (лінеаризована трактовка):

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{\left[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+h^2\right]^{3/2}}\cdot\zeta(\xi,\eta)d\xi d\eta=u(x,y)\,,\ u(x,y)=\frac{V_z(x,y)}{2\pi\gamma\sigma}. \qquad (1.9)$$

Останнє рівняння є спрощенням рівняння (1.8), яке в свою чергу отримано з рівняння

$$\zeta(x,y)-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left\{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+\left[\zeta(x,y)-z\right]^2\right\}^{1/2}}\Bigg|_{\zeta(x,y)}^{\zeta(\xi,\eta)}d\xi d\eta=\frac{V_z(x,y,z)}{2\pi\gamma\sigma},$$

що є наслідком рівняння (1.7), отриманого інтегруванням по ζ при $H(\xi,\eta)=0$ фундаментального виразу (1.6), який існує в класі Страхова $St^{(0,\alpha)}(1,D)$ [142].

Плоска трактовка задачі. Звичайно, в природі не існує плоскої задачі – така постановка є наслідком певної ідеалізації реальних умов. Одначе, її вивчення є актуальним з двох причин:

→ як частинний випадок просторової задачі, в якому легше дослідити властивості розв`язків, знайти межі застосовності чисельних формул й освоїти техніку обчислень з аналізом похибок;

→ як прикладний аспект гравірозвідки: аномальне поле витягнутих структур з певною точністю апроксимується двовимірним полем.

Для мас, зосереджених в області D (рис. 1.2), що створюють у “верхній” напівплощині $R_{+}^{(2)}=\{x:-\infty<x_1<\infty;x_3<h\}$ поле, вертикальну складову якого описує вираз (1.2), справедливий фундаментальний вираз

$$V_z=-\gamma\sigma\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ln\left[(\xi-x)^2+\zeta^2(\xi)\right]_0^{\zeta}d\xi+C.$$

Розбиваючи проміжок інтегрування $[0,\zeta(\xi_1)]$ на відрізки $[0,h]$ й $[h,\zeta(\xi_1)]$, де h – *довільне значення,* $h_1\le h\le h_0$, та враховуючи відомий вплив горизонтального плоскопаралельного шару (рис. 1. 4), Нумеров вивів без строгого математичного обґрунтування з точністю до сталої інтегрування таке нелінійне рівняння

$$2\pi\gamma\sigma h-\gamma\sigma\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{(\xi-x)^2+h^2}{(\xi-x)^2+\zeta^2(\xi)}d\xi=g(x),$$

Рис. 1.4. Визначення контакту способом Нумерова.

або у прийнятих нами позначеннях

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{(\xi-x)^2+h^2}{(\xi-x)^2+\zeta^2(\xi)}d\xi=u(x)-h,\ u(x)=\frac{U_y(x,0)}{2\pi f\sigma},\tag{1.10}$$

що залежить від *двох параметрів* – стрибка σ густини на контакті $\zeta(x)$ і глибини *h* залягання контакту в деякій довільно обраній точці x^*, яка не збігається, взагалі кажучи, з точкою *x* спостереження поля; *f* – гравітаційна стала. Застосувавши уже згадану методику, отримаємо плоскі аналоги рівнянь (1.7) і (1.8)

$$2\gamma\sigma\int_{-l}^{l}\frac{[H(\xi)-z][\zeta(\xi)-H(\xi)]}{(\xi-x)^2+[H(\xi)-z]^2}d\xi=V_z(x,z),\tag{1.11}$$

$$2\pi\gamma\sigma\zeta(x)+2\gamma\sigma\int_{-\infty}^{\infty}\frac{[\zeta(x)-z][\zeta(\xi)-\zeta(x)]}{(\xi-x)^2+[\zeta(x)-z]^2}d\xi=V_z(x,z),\tag{1.12}$$

з точністю до членів другого порядку малості за умови пологого рельєфу[3], тобто $\frac{\zeta(\xi)-H(\xi)}{H(\xi)-z}$ й $\frac{[\zeta(\xi)-\zeta(x)]}{\zeta(x)-z}\le 1$. Очевидно, що рівняння (1.11) – лінійне, а рівняння (1.12) стає лінійним при зведенні його до формулювання Нумерова.

Наближений розв'язок рівняння (1.10) Б. В. Нумеров отримав у вигляді

$$\zeta_{\text{Н}}(x)=h+\Delta_{\text{Н}}\zeta(x),$$

за додаткової умови, що рельєф контактної границі не надто контрастний, у крайньому випадку такий, що коливання функції $\Delta_{\text{Н}}\zeta(x)$ менше від *h*. За цієї умови однозначну функцію $\Delta_{\text{Н}}\zeta(x)$ визначено як обмежений розв'язок лінійного інтегрального рівняння першого роду

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{(\xi-x)^2+h^2}\Delta\zeta(\xi)d\xi=u(x)-h,\tag{1.13}$$

яке залежить від *двох параметрів σ* і *h*, тобто $\Delta_{\text{Н}}\zeta(x)=\Delta\zeta(x;\sigma;h)$.

М.Р. Малкін [56] задачу визначення контактної поверхні ∂D_2, яка розділяє два однорідні косонамагнічені шари, за заданим магнітним потенціалом і стрибком $J=(J_x,J_y)$ вектора намагніченості порід зводить до розв'язування нелінійного інтегрального рівняння, яке за умови вертикальної намагніченості порід цілком збігається з рівнянням (1.10). Наближений його розв'язок $\zeta_{\text{М}}(x)=h+\Delta_{\text{М}}\zeta(x)$ одержано методом Б.В. Нумерова. Тому він залежить від *трьох параметрів:* двох природних – складових J_x і J_y стрибка вектора намагніченості порід і одного "привнесеного" – товщини виділеного однорідного магнітного шару, $\Delta_{\text{М}}\zeta(x)=\Delta\zeta(x;J_x,J_y;h)$.

Г. Рейнбой [165], порівнюючи лінеаризоване рівняння (1.13) для контактної поверхні з інтегралом Пуассона для подання гармонійної функції *v(x,y)* в півплощині за значенням її на рівні *y* = *h*

[3] До речі, за цими відношеннями можна легко регулювати швидкість збіжності ітерацій для рівнянь (1.7-1.8).

$$v(x,0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{(\xi-x)^2+h^2}v(\xi,h)d\xi,$$

виявив, що *лінеаризована задача для контактної поверхні еквівалентна задачі визначення гармонійної функції* $v(x,y)$ за значеннями $v(x,0)$, тобто що $\Delta\zeta(x)=v(x,h)$. Тим самим він фактично показав, що *точний розв'язок* інтегрального рівняння (1.13) повинен бути *слідом гармонійної функції* (хоча цей факт ще довго залишався неусвідомленим) і, окрім того, відкрив перспективний напрямок в теорії інтерпретації аномалій, пов'язаний з *аналітичним продовженням* полів у півпростір зосередження їх джерел (не тільки необмежених типу шару, але й обмежених) [4, 5, 111, 119, 144, 162].

О. О. Заморєв [36, 37] дослідив в комплексній множині $z=x+iy$ задачу визначення контактної поверхні ∂D_2, зображеної у вигляді *скінченної ундуляції* $y(x)=h+\eta(x),\ y(a)=y(b)=h$ на скінченному інтервалі $[a,b]$ горизонтальної прямої $y(x)=h=const>0,\ x\notin[a,b]$ (рис. 1.5)[4].

Проблему відновлення форми збурювального тіла (виповненого масами однорідної густини σ і обмеженого, на відміну від нумерівського шару, прямою $y=h$ і кривою $y(x)=h+\eta(x),\ x\in[a,b]$, $\eta(a)=\eta(b)=0$), тобто задачу визначення параметрів

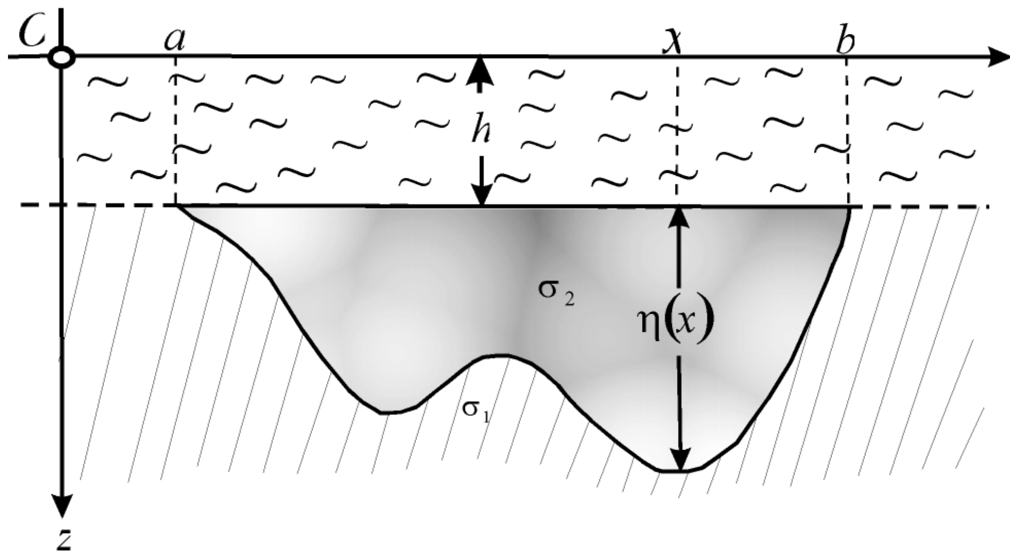


Рис. 1.5. Модель контакту за Заморєвим.

$a,\ b,\ h$ однозначної на інтервалі $[a,b]$ обмеженої функції $\eta(x)$ за заданими на осі $y=0$ значеннями (відповідним чином прокаліброваними) похідної логарифмічного потенціалу $U(x,y)$ Заморєв звів до нелінійного рівняння, яке в його праці зображено:

$$U_z^+(x_1,0)=\gamma\sigma\int_{-l}^{l}\ln\frac{(\xi-x)^2+h^2}{(\xi-x)^2+\zeta^2(\xi)}d\xi,\quad l<\infty, \qquad (1.14_1)$$

де $U_z^+(x_1,0)=g(x),\ x_1=x,\ x_2=\zeta,\ \xi_1=\xi$, а в наших позначеннях його можна записати у двох еквівалентних один одному зображеннях:

---

[4] Вплив горизонтального шару потужністю *h* не враховано.

$$\int_a^b \ln\frac{\xi - x + ih}{\xi - x + i(h+\eta(\xi))}d\xi = \int_a^b \xi\left(\frac{1+\eta'(\xi)}{\xi - x + i(h-\eta(\xi))} - \frac{1}{\xi - x + ih}\right)d\xi = u(z), \qquad (1.14_2)$$

$$u(z) = \frac{G(z)}{\pi f\sigma},\ \ G(z) = \frac{\partial U(z)}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} - i\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}\right).$$

Обидва ці подання наведено у статті [36], до того ж друге, яке детально вивчено, одержано з першого інтегруванням частинами за умови, що $\eta(a) = \eta(b) = 0$. У результаті аналізу другого подання напруженості $u(z)$ поля О. О. Заморєв знайшов його *точне обернення.* На жаль, ефективність цього обернення при розв'язуванні прикладних задач не перевірено ще й досі. Звернемо тепер увагу на перше зображення напруженості поля. Неважко виявити, що дійсна її складова

$$\frac{1}{2\pi}\int_a^b \ln\frac{(\xi - x)^2 + h^2}{(\xi - x)^2 + y^2(\xi)}d\xi = u(x),\ \ y(x) = h + \eta(x),\ \ x \in [a,b] \qquad (1.14_3)$$

за зовнішнім виглядом нагадує рівняння Б. В. Нумерова (1.10) без доданку h у правій частині, що відтворює за вибраної калібровки поля притягання однорідного шару товщиною $h > 0$. Більше того, величина інтегралу в лівій частині рівняння (1.14₃) не змінюється на заморєвських тілах у разі заміни скінченних границь a і b на нескінченні -∞ і ∞, тому ліві частини рівнянь (1.10) і (1.14₃) за зовнішнім виглядом повністю збігаються, хоча і зображають в математичній символіці *різні* за суттю *предметні моделі:* перше – притягання *необмеженим шаром* $\zeta_{\text{н}}(\xi)$ між границями $y = h$ і $y = \zeta(x)$, $-\infty < x < \infty$; друге – притягання локалізованим *скінченним тілом*[5] $\zeta_{з}(\xi)$, обмеженим *фінітними* кривими $y = h$ і $y = h + \eta(x)$, $x \in [a,b]$, $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Можливо, зовнішня подібність лівих частин рівнянь Б.В. Нумерова й О. О. Заморєва відігравала свою роль у подальших прикладних дослідженнях, серед яких осібно вирізняється праця [157].

У цій праці, написаній в 1941 р. і виданій в 1947 р., О.О. Шванк помітив, що коли в рівнянні Б.В. Нумерова *замість параметра h підставити значення контакту* $\zeta(x)$ в точці *x* спостереження поля, то з рівняння (1.10) виходить *нове нелінійне* інтеґральне рівняння[6]

$$\zeta(x) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \ln\frac{(\xi - x)^2 + \zeta(x)}{(\xi - x)^2 + \zeta(\xi)}d\xi = u(x), \qquad (1.15)$$

яке за не дуже великих коливань шуканої функції $\zeta(x)$ можна розв'язувати *методом послідовних наближень.* На одному окремому прикладі він показав, що обчислені "вручну" послідовні наближення $\{\zeta_n(x)\}$ контакту $\zeta(x)$ з першого $\zeta_1(x) = u(x)$ і до 6-го включно мають тенденцію до збіжності. Проте зауваження О.О. Шванка, засноване на виводі Б.В. Нумерова, залишилось, на жаль, без уваги, можливо, через те, що і в самого автора пропозиції *не склалося чіткої думки про єдино можливий функціональний зв'язок* поміж контактом і полем.

Дійсно, в § 2 розділу 8 (стор. 361-374) його книги [157] для поля від контакту розглядаються, як *рівноправні,* два вирази, один з яких, а саме,

---

[5] Згідно Нумерова, надлишкова густина мас є $\sigma = \sigma_2 - \sigma_1$ (для локалізованих тіл прийнято $\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$).

[6] У Шванка це рівняння не було нормоване згідно (1.10).

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{(\xi-x)^2+h^2}\Delta\zeta(\xi)d\xi=u(x),\ \ \Delta\zeta(x)=\zeta(x)-h\,, \qquad (1.16_1)$$

є лінеаризацією зв'язку

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{(\xi-x)^2+h^2}{(\xi-x)^2+\zeta^2(\xi)}d\xi=u(x), \qquad (1.16_2)$$

а другий – зв'язком вигляду (1.15). Зазначимо, що в роботі [94, с. 50], виходячи з інших посилок, отримано загальніший вираз за умови, що інтервал інтегрування по ξ обмежено рамками $[-l,l]$ (рис. 1.2).

$$\gamma\sigma\int_{-l}^{l}\ln\frac{(\xi-x)^2+[\zeta(\xi)-z]^2}{(\xi-x)^2+[H(\xi)-z]^2}d\xi=V_z(x,z). \qquad (1.16_3)$$

Звідси можна отримати відповідне рівняння для другої моделі, якщо покласти $H(\xi)=0;\ l=\infty$, та врахувати, що

$$\ln\frac{(\xi-x)^2+[\zeta(\xi)-z]^2}{(\xi-x)^2+z^2}=\ln\frac{(\xi-x)^2+[\zeta(x)-z]}{(\xi-x)^2+z^2}+\ln\frac{(\xi-x)^2+[\zeta(\xi)-z]^2}{(\xi-x)^2+[\zeta(x)-z]^2},$$

а також [157, с. 69], що $\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{u^2+H_2^2}{u^2+H_1^2}du=2\pi\left(H_2-H_1\right)$. Підсумком згаданих перетворень буде нелінійне інтегральне рівняння

$$2\pi\gamma\sigma\zeta(x)+\gamma\sigma\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{(\xi-x)^2+[\zeta(\xi)-z]^2}{(\xi-x)^2+[\zeta(x)-z]^2}d\xi=V_z(x,z); \qquad (1.16_4)$$

при $\zeta(x)=h$ отримуємо рівняння Нумерова (1.10) при $z\neq 0$. Розділивши його на $2\pi\gamma\sigma$ й поклавши в ньому $z=0$, отримаємо його у вигляді (1.4) [142]. Основна його перевага полягає не стільки в тому, що воно отримане за мінімальних обмежень на шукані границі, скільки в тім, що завдяки його поданню у вигляді рівняння 2-го роду з виділеною позаінтегральною складовою вдалось елементарними засобами довести його існування й стійкість [87, 90] і визначити простий спосіб його точного розв'язання (реалізації на ПК) на структурному класі Страхова $St^{(1,\alpha)}(1,D)$, $0\leq\alpha\leq 1$. Зазначимо, що аналог рівняння (1.15) у комплексній площині $z=x+iy$ має такий вигляд [45, 55]

$$-\frac{s_0-\bar{s}_0}{2}+\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D_2}\frac{s-\bar{s}-s_0+\bar{s}_0}{s-z}ds=u(z),$$

де $u(z)=\dfrac{G(z)}{\pi f\sigma}$, $G(z)=\dfrac{\partial U(z)}{\partial z}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial U(x,y)}{\partial x}-i\dfrac{\partial U(x,y)}{\partial y}\right)$ – напруження поля, а $s=\xi+i\zeta(\xi)$ і $s_0=x+i\zeta(x)$ – точки контуру ∂D_2; $\bar{s}=\xi-i\zeta(\xi)$, $\bar{s}_o=x-i\zeta(x)$ – спряжені з ними точки. Проблеми коректної розв'язаності нелінійної задачі в комплексній площині докладно вивчено в працях [150, 151].

Так чи інакше, але у наступних роботах О.К. Маловичка [57, 58], В. М. Новоселицького [63] і багатьох інших авторів [8, 24-28, 31, 41, 47-48, 60, 77, 83, 121-122, 162] *за рівняння для контактної поверхні брали вираз* (1.16₂) або його *лінеаризацію* (1.16₁). Кожен з цих виразів залежить від *двох*

параметрів – σ і h – й описує, як це випливає з інтегрального рівняння (1.14_3) Заморєва при $a \to -\infty$ і $b \to \infty$, вплив необмеженого в латеральному напрямку і обмеженого за товщиною геологічного тіла на зразок синклінорію, антикліналі й синкліналі якого виповнені масами однорідної густини протилежних знаків (рис. 1.6). Тіло це відділено від рівня спостережень шаром товщини *h*, дія якого виразом (1.16_2) *не враховується.* Разом з тим, у цій постановці було отримано цікаві результати, які бажано використати в теорії структурної задачі, що ґрунтується на рівнянні (1.15).

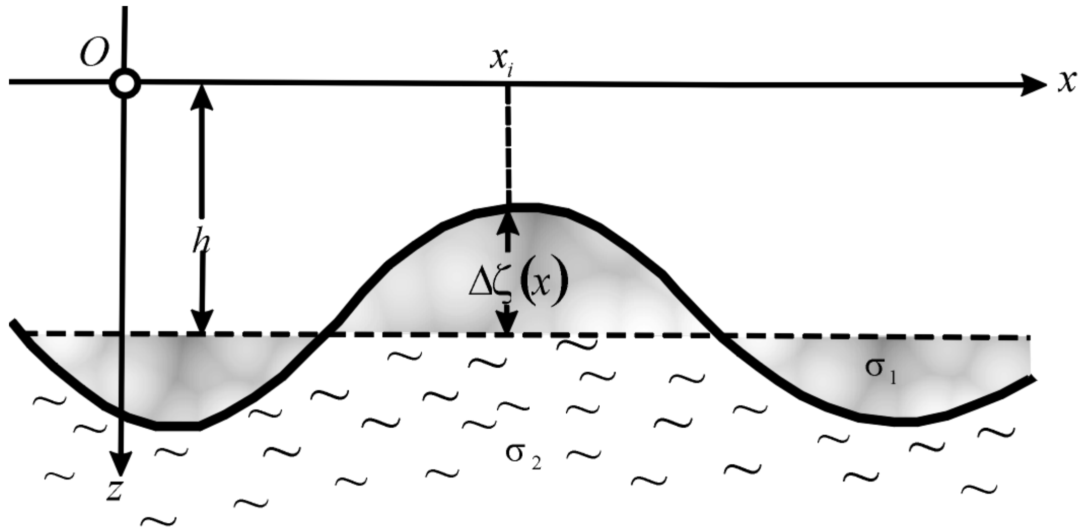


Рис. 1.6. Модель контакту за Маловичком.

До числа таких розробок у першу чергу відносяться відкриті М.Г. Сербуленком [77] і Ю.В. Антоновим [7-8] *способи визначення двох і більше контактних границь,* що розділяють однорідні шари. Слід згадати також дослідження О. К. Маловичком [58] питань *уточнення розв'язків* лінеаризованого рівняння та єдиності його розв'язків, якими встановлено, що *одному й тому ж полю можуть відповідати як обмежені* однорідні випуклі тіла, так і *різноманітні необмежені* однорідні тіла типу шару. Заслуговують на увагу перші результати чисельного розв'язання нелінійного інтегрального рівняння (1.16_2) у межах теорії регуляризації [24-25, 28, 41, 60, 121, 122], вивчення В.І. Старостенком [83] можливостей *стійкого чисельного визначення декількох контактних границь,* що описуються нелінійними рівняннями виду (1.16_2), і спроби О.І. Кобрунова та Р.П. Денисюка [31, 47-48] відшукати за допомогою одного чисельного алгоритму границі розподілу *неоднорідних* комплексів.

Аналогічну модель задачі для контактної поверхні в комплексній площині $z = x + iy$ запропоновано в 70-х р.р. минулого століття В.М. Страховим [103-109]. Саме для *шаруватого середовища у смузі, відокремленій від нуля і обмеженій прямими* $y = h^-$ і $y = h^+$, $h^- < h^+ < 0$, що складаються з *двох однорідних шарів* порід з густинами σ, і σ_2, які *розділяє жорданова крива* $\partial D : \eta = \eta(x)$, $-\infty < x < \infty$ зі *стрибком* $\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$ густини на контакті і *асимптотою* *h*,

$h^- < h < h^+$, однією й тією ж ліворуч та праворуч, яку *крива* ∂D *може перетинати не більше, ніж скінченне число разів* (рис. 1.7), він вивів нове нелінійне інтегральне рівняння

$$\int_{\partial D} \frac{s - \bar{s} - 2ih}{s - z} ds = \begin{cases} u^+(z), & z \in D^+ \\ u^-(z), & z \in D^- \end{cases}, \qquad (1.17)$$

де D^+ - частина площини "вище" кривої ∂D, D^- – "нижче" кривої ∂D, $s = \xi + i\eta$, $\bar{s} = \xi - i\eta$; $u(z)$ – в калібровці (1.7) задано за результатами спостережень на "земній поверхні" $y = 0$. Для цього рівняння В.М. Страхов довів *теорему єдиності* його розв'язку і *редукував* задачу визначення контакту за полем до задачі *побудови допоміжної функції,* що конформно (і однолистно) відображає нижню півплощину певної комплексної площини на область D^- під шуканою кривою.

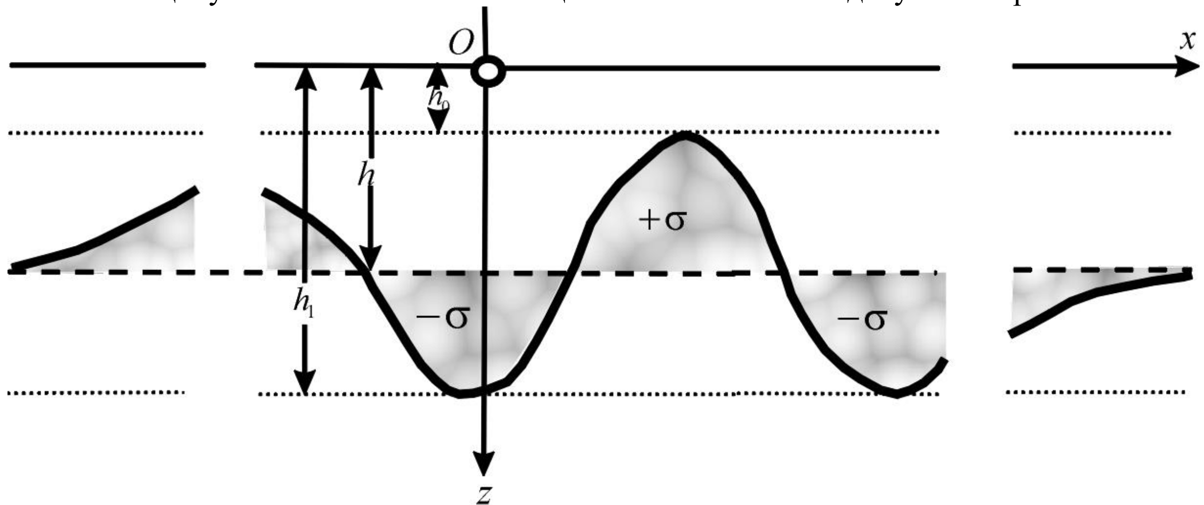


Рис. 1.7. Модель контакту за Страховим.

Цей підхід до розв'язування задачі передбачалося побудувати за аналогією з розвинутим В.К. Івановим методом відшукання однорідно розподілених джерел на скінченних однозв'язних областях [39, 40]. Незабаром після вибраної редукції було знайдено цілі *класи розв'язків* рівняння (1.17). Їх подавали або як сімейства *розв'язків у скінченному вигляді,* коли границю шуканої області визначають скінченним числом параметрів зі скінченної системи (нелінійних) рівнянь, або у вигляді двопараметричних сімейств *розв'язків "в малому",* коли границю визначають у вигляді (невеликих) відхилень контуру шуканої від контуру заданої області. Ці класи отримали, відповідно, О. В. Цирульський [127, 136] і В.Г. Чередниченко [139]. До того ж В.Г. Чередниченко зняв обмеження [103] на розв'язки рівняння (1.17), допустивши, що крива ∂D необов'язково має бути графіком і може перетинати асимптоту *h* нескінченну кількість разів.

Отож, для опису фундаментальної залежності гравітаційного поля від шаруватого середовища було запропоновано на початок 1980-х років дві принципово різні математичні моделі: *модель Нумерова* (рис.1.2) та *модель Маловичка-Страхова* (рис.1.5). У моделі Нумерова як прикладну модель середовища розглянуто необмежений шар між контурами ∂D_1 та ∂D_2, його притягання враховано у вигляді суми притягання шаром постійної товщини *h* і відхиленнями від цього шару між

прямою $y = h$ і кривою $y = \zeta(x)$. У моделі Маловичка-Страхова предметну модель шаруватого середовища ототожнено з флуктуаціями $y = \eta(x) - h$ кривої $y = \eta(x)$ відносно своєї асимптоти *h*, що обмежують "додатні" та "від'ємні" маси густиною σ; поле цих мас аж ніяк не могло збігатися з полем моделі Нумерова, оскільки *не було враховано вплив* шару товщиною *h*. Проте кожне з інтегральних рівнянь (1.12_2) і (1.17), що відповідало тій чи іншій моделі, виявилось однаково залежним від *двох параметрів:* надлишкової густини σ і сталої товщини (асимптоти) *h* шару. Відповідно і розв'язки рівнянь також стали залежними від цих параметрів. У літературі відзначений параметричний зв'язок подано навіть як *визначальний* для класифікації обернених задач гравіметрії. З виходом у світ праць [103-109, 127, 136, 139], в яких закладено основи теорії оберненої задачі для предметної моделі Маловичка-Страхова (рис. 1.5), устоялося положення, що *обернені задачі для обмежених тіл принципово відрізняються від обернених задач для необмежених тіл*. Їх відмінність полягає саме в тому, що розв'язки задач для обмежених тіл залежать тільки від одного параметра σ, тоді як розв'язки для необмежених тіл залежать як від параметра σ, так і від параметра *h* ("*середньої глибини*" за Нумеровим або асимптоти за Страховим). І довгий час ніхто не піддавав сумніву переконливість цього твердження, хоч воно явно не узгоджувалося з аналізом рівнянь (1.17) та (1.15). Уже побіжний погляд на них переконує, що рівняння (1.17), а отже, і його розв'язок має залежати як від параметра σ, так і від асимптоти *h* шуканого контуру *∂D,* тоді як рівняння (1.15) для того ж контуру (як і численних інших обмежених) від параметра *h* не залежить. Рівняння (1.15), *якщо воно вірне,* давало зразок опису задачі для контактної поверхні, для якого одне з положень теорії, розвинутої в роботах [103-109, 127, 136, 139], потребувало уточнення, проте з невідомих причин цього не сталося. Або автор пропозиції (1.15) чи його послідовники не були впевнені в адекватності опису моделі задачі, або авторам зазначених праць не була відома праця [157]. Так чи інакше, але рівняння (1.15) було проігноровано під час побудови теорії обернених задач для шаруватих середовищ і питання про вирішальну відмінність задач для обмежених та необмежених тіл залишилося відкритим. Окрім того, в створеній теорії не розглянуто узагальнення відкритого Г. Рейнбоєм факту, що *розв'язки лінеаризованого інтегрального рівняння для контактної поверхні слід шукати на обмежених множинах гармонічних функцій*. Математичне обґрунтування згаданих та інших супутніх проблем дано в дослідженнях [85-94, 142, 147].

Слід згадати також практику [83] апроксимації у рамках моделі Страхова шуканої контактної поверхні ламаною із застосуванням набору одиничних тіл зручної форми. Відмінність цієї постановки від вищезгаданих – чисто технологічна, хоч і зручна для обчислень.

Трактовка контактних задач в постановці Заморєва донедавна була панівною в теорії потенціалу[7], хоч вона розходиться з геофізичною практикою. Ситуацію було зрушено з місця

---

[7] Найбільший розвиток отримали їх прикладні аспекти методами теорії функцій комплексної змінної.

в ряді праць А.В. Чорного [85, 87, 146] та підсумковій Н.Н. Чорної [142], де задачу визначення контакту зведено до розв'язання нелінійного інтегрального рівняння (1.4), виведеного на основі фундаментальної залежності (1.2) між тяжіючими масами й породженим ними полем. Що ж до лінеаризованої постановки контактної задачі, то її характеризують два припущення: – *коливання контакту малі порівняно з глибиною його залягання*;

– *нелінійна частина за своїм вкладом менша від точності спостережень*.

Основи цієї постановки розроблено в працях [47, 56, 83, 88], тому її часто застосовують для повнішого вивчення властивостей розв'язків. На сьогодні її актуальність, згідно О.І. Кобрунова [47], виправдана:

1. *геологічно*: часто лінеаризація правомірніша, ніж двовимірна нелінійна багатопараметрична модель;
2. *чисельно*: значно спрощуються й прискорюються обчислення;
3. *методологічно*: в лінійній постановці легше встановити існування й еквівалентність розв'язків й узагальнити їх на просторовий випадок [109, с. 8]

Вирішення обернених задач цікаве не лише як реалізація одного з етапів інтерпретації [108, 134], а й з точки зору побудови геологічно змістовних еквівалентів різних класів сингулярних джерел, адже *практична* постановка оберненої задачі звучить так:

→ знайти *еквівалентне сімейство* функцій контактів $\zeta(\xi_1)$, що визначають форму границі розділу двох середовищ $\overline{D_1}$ й $\overline{D_2}$, за явно заданою величиною $U_{x_2}(x)$ потенціалу (1.2), створеного джерелом поля поза цим джерелом.

Тепер перед нами постає проблема окреслення єдиного сімейства, що визначає шуканий контакт, тобто проблема єдиності розв'язку рівняння (1.10).

1.1.4. Клас єдиності розв'язку контактної задачі. Як згадано вище, окреслений Нумеровим клас розв'язків рівняння (1.10) не забезпечує їх єдиності; продовжуючи дослідження цього рівняння, окреслимо множину існування його розв'язків. Для вирішення конкретних обернених задач, які є чисельною основою інтерпретації даних гравіметрії, створено широкий спектр методів, у кожному з яких по-різному враховано модельні уявлення і апріорні дані про середовище, неоднозначність й нестійкість рішень, тощо: методи підбору [17, 46 , 52, 65, 84], статистичні методи, критеріальний підхід О.І. Кобрунова [47, 48], двоїстий метод [29, с. 292], метод локальних поправок [72], інші.

Задачі відновлення однієї контактної поверхні розв'язують переважно у рамках методів підбору, які розрізняються наступними чинниками: – модельним класом, в якому шукають розв'язок; – метрикою нев'язки полів; – способом мінімізації цільового функціоналу. У простих ситуаціях, подібних до нашої постановки, ці методи дають прийнятний результат при

гарному початковому наближенні, а в складних з ростом числа параметрів зростає нестійкість розв’язку.

Почнемо з апріорного виділення модельного класу джерел зі скінченним числом параметрів[8], на якому розв’язок задачі єдиний й стійкий; на будь-якому іншому класі це не обов’язково. Єдиність розв’язку забезпечують певним обмеженням області розв’язків й надлишкової густини на заданій множині коректності; результати формулюють у вигляді теорем єдиності. Найвизначніші досягнення на цьому поприщі належать О.С. Новікову [62], Л.М. Сретенському [82], І. М. Раппопорту [73], А.В. Чередніченку [138], В.М. Страхову [104, 107], Д.П. Зідарову [123], В.Г. Філатову [128] та іншим [40, 51, 69, 134, 147, 156, 158], хоч досі для моделей з постійними фізичними властивостями виділено небагато класів, у яких розв’язок оберненої задачі має *слабку* [104] чи *параметричну* [29] *єдиність* (див. Коментар). Їх використання дозволяє врахувати певну апріорну інформацію.

Щоб ввести клас єдиності розв’язків лінеаризованої задачі, конкретизуймо властивості функцій, що входять до рівняння (1.4) при $x_3 = 0$. Згідно зауваження 1.3, для існування цього інтегралу достатньо належності пари (σ,ζ) до класу Страхова $St^{(0,\alpha)}(1,D)$ за сталої густини $\sigma(\xi,\eta) = const$.

Позначмо через $h^- = \inf \zeta(x)$, $h^+ = \sup \zeta(x)$, відповідно, глобальний мінімум й максимум функції $\zeta(x), -\infty < x < \infty$, через $h_1 = \inf\{h^-\}$ й $h_0 = \sup\{h^+\}$ – постійні, які характеризують в цілому множину $St^{(1,\alpha)}(1,D)$ контактів $\zeta(x)$ зі смуги[9]

$$D = \{< x,\zeta >; -\infty < x < \infty;\ h_1 < \zeta(x) \le h_0\}, \tag{1.18}$$

а через $\omega(\zeta) = h^+ - h^-$ – “коливання” функції $\zeta(x)$, $x \in R^{(1)}$ й зауважмо, що для функцій з класу $St^{(1,\alpha)}(1,D)$ справедливі нерівності

$$0 < h_1 \le h^- \le \zeta(x) \le h^+ \le h_0, \tag{1.19}$$

де величини h_1 і h_2 обмежують смугу *D*. *Нерівність* (1.18) *завжди має місце для кусково-неперервних функцій* $\zeta(x)$. На множині $St^{(1,\alpha)}(1,D)$ виділимо таку підмножину функцій, для якої виконується умова:

$$\omega(\zeta) < \zeta(x),\ x \in R^{(1)}, \tag{1.20}$$

а серед них окреслимо множину обмежених функцій, для елементів яких справедливе співвідношення:

$$0.6h \le |\zeta(x)| \le 1.4h,\ 0 < h^- \le h \le h^+. \tag{1.21}$$

Множину кусково-неперервних на осі $R^{(1)} = (-\infty,\infty)$ функцій, які задовольняють умовам (1.21) назвімо **класом Нумерова** $Nu(-\infty,\infty)$; резервуєм позначення $Nu^{(1,\alpha)}(1,D)$ для неперервних за Гельдером разом з своїми 1-ми похідними на смузі (1.18) функцій. Отже, з

---

8 В лінійних задачах виділення такого класу еквівалентне застосуванню варіаційних принципів [104].

9 Тут $x_1 = x$, тобто індекс при абсцисі опущено для зручності запису.

аналізу предметних моделей Нумерова і Маловичка-Страхова, виявилось, що більш адекватною для двовимірною евклідового простору $R^{(2)} = R^{1(1)} \times R^{(1)}$, $R^{(1)} = (-\infty, \infty)$ є предметна модель Нумерова, яку подано у вигляді шару (1.18), обмеженого контурами $\partial D_1 : y = 0$ і $\partial D_2 : y = \zeta(x), \ x \in R^{(1)}$, зануреного в простір $R^{(2)}$ і виповненого масами постійної густини $\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$. Сам клас Нумерова $Nu^{(k,\alpha)}(\sigma, D) = S_{loc}(D) \times C^{(k,\alpha)}(R^{(1)})$ є декартовим добутком множини $S_{loc}(D)$ обмежених і (майже всюди) локально інтеґрованих функцій, що описують густину $\sigma = \sigma(x, y), \ (x, y) \in D$ мас в області $D \subset R^{(2)}$ та сукупності $C^{k,\alpha}(R^{(1)}), \ k = 0,1,...,; \ \ 0 < \alpha \le 1$ функцій $y = \zeta(x), \ x \in R^{(2)}$ неперевних (за Гельдером) з їхніми похідними до k-го порядку включно з показниками α, що описують контакти різнорідних шарів зі смуги $D = \{(x, y): \ -\infty < x < \infty; \ 0 < \zeta(x) \le h_0\}$, де h_0 – обмежена стала. Ми розглядатимем всі конструкції на класі $Nu^{(k,\alpha)}(1, D)$ зі сталою густиною, відзначеною символом 1. За означенням має місце вкладання $Nu^{(1,\alpha)}(1, D) \subset St^{(1,\alpha)}(1, D)$; власне, за влучним зауваженням П.І. Балка [13], через подібне розшарування класу функцій, в якому шукають розв'язок, реалізується концепція параметризації обернених задач геофізики.

Підкреслюємо, що за бажанням *будь-який контакт з класу* $St^{(1,\alpha)}(1, D)$ *можна перевести у відповідний клас* $Nu^{(1,\alpha)}(1, D)$, для чого лише потрібно розширити смугу D до такої смуги D_0, для якої будуть справедливі нерівності (1.20-1.21) Подібне розширення можна здійснити переносом початку відліку "глибин" h на певний рівень й обчисленням з допомогою інтегралу Пуассона на ньому відповідних значень поля.

До речі, ми отримали рівняння (1.9) при неявних вимогах щодо властиво стей підінтегральних функцій

$$\frac{\zeta(\xi, \eta) - \zeta(x, y)}{\zeta(x, y) - z} << 1, \ \zeta(x, y) = h, \ z = 0, \ h \in [h^-, h^+], \ h^{\pm} = ext\zeta(\xi, \eta), \ z > 0,$$

з обмеженням "коливань" контактної смуги D: $|h^+ - h^-| \le \omega = const > 0$. Обраний та ким чином з множини $St^{(0,\alpha)}(1, D)$ певний елемент (σ, ζ) теж належить класу Нумерова $Nu^{(1,\alpha)}(1, D)$ неперервних за Гельдером функцій $\zeta = \zeta(x)$ разом з їх першими похідними $\zeta(-\infty) = \zeta(\infty) = 0$.

1.2. Лінеаризовані інтегральні рівняння для контакту

Для чисельного розв'язання обернених задач потенціалу наразі використовують [102, 113] метод інтегральних зображень, який дозволяє звести розв'язок задачі в необмеженій області до розв'язку інтегрального рівняння на компакті, легко долаючи при цьому проблеми збіжності, які виникають через похибки апроксимації оператора рівняння. В рамках цього методу ми прояснили схему виведення рівнянь (1.7), (1.8) та (1.11), (1.12), отриманих Нумеровим. Тепер за його допомогою виведемо лінійне інтеґральне рівняння сформульованої задачі з обмеженнями (1.18-1.21) для плоского випадку; його поширення на простір $R^{(3)}$ носить дещо громіздкий, але тривіальний характер.

1.2.1. Лінеаризація за схемою Нумерова. Відновимо інтегральне рівняння для контакту в постановці Нумерова. Для цього зосередьмось на апроксимації нелінійного оператора прямої задачі (1.15) деяким лінійним оператором на функціях з класу $Nu^{(1,\alpha)}(1, D)$. Основний результат наших міркувань містить така теорема.

Теорема Нумерова. *Для контактних границь, які описуються функціями* $\zeta(x), x \in R^{(1)}$ *з класу Нумерова* $Nu^{(1,\alpha)}(1, D)$, *головну роль в гравітаційному тяжінні підземних мас відіграє перша складова у лівій частині рівняння* (1.4), *а друга слугує деякою малою поправкою до неї.*

Доведення. Через нерівності (1.19) з рівняння (1.4) очевидно отримуємо такий вираз

$$|v(x)| = |u(x) - \zeta(x)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\infty}^{\infty} \ln\frac{(\xi - x)^2 + \zeta^2(x)}{(\xi - x)^2 + \zeta^2(\xi)} d\xi\right| \le \omega(\zeta) = h^+ - h^-, \qquad (1.22)$$

звідки та на основі нерівності (1.20) переконуємось у справедливості твердження теореми. ■

<u>Висновок</u> 1.1. У класі Нумерова $Nu^{(1,\alpha)}(1, D)$ напевне існує розв'язок $\zeta(x), x \in R^{(1)}$ нелінійного інтегрального рівняння (1.15).

Це твердження випливає з отриманого щойно співвідношення (1.22) й обмеженості внаслідок (1.21) функцій з класу $Nu^{(1,\alpha)}(1, D)$.

<u>Висновок</u> 1.2. У класі функцій $Nu^{(1,\alpha)}(1, D)$ нелінійне інтегральне рівняння (1.4) 1-го роду можна замінити з точністю до квадрату ухилення $\zeta(\xi, x) = \zeta(\xi) - \zeta(x)$ лі

нійним інтегральним рівнянням Фредгольма 1-го роду

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta(x)}{(\xi - x)^2 + \zeta^2(x)} \zeta(\xi, x) d\xi = v(x), \ v(x) = u(x) - \zeta(x), \ x \in R^{(1)} = (-\infty, \infty) \qquad (1.23_1)$$

Доведення. З належності функції контакту $\zeta(x)$ до класу $Nu^{(1,\alpha)}(1, D)$ випливає що $|\zeta(\xi, x)| \le \omega(\zeta)$, крім того з (1.21) маємо

$$\left|\frac{2\zeta(x)\cdot\omega(\zeta) + \omega^2(\zeta)}{(\xi - x)^2 + \zeta^2(x)}\right| < 1,$$

що еквівалентно співвідношенню $\omega^2(\zeta) + 2\zeta(x)\cdot\omega(\zeta) - \zeta^2(x) < 0$, оскільки розглядаємо лише позитивні функції; перша з нерівностей очевидна, а остання еквівалентна (1.21), або, що те ж саме, умові $\omega(\zeta) \le 0.4h^-$. З наведених нерівностей безсумнівно отримуєм співвідношення

$$\frac{2\zeta(x)|\zeta(\xi, x)| + \zeta^2(\xi, x)}{\zeta^2(x) + (\xi - x)^2} \le \frac{2\zeta(x)\omega(\zeta) + \omega^2(\zeta)}{\zeta^2(x)} < 1,$$

яке дає можливість записати розклад

$$\ln\frac{(\xi - x)^2 + \zeta^2(\xi)}{(\xi - x)^2 + \zeta^2(x)} = \ln\left\{1 + \frac{2\zeta(x)\zeta(\xi, x) + \zeta^2(\xi, x)}{\zeta^2(x) + (\xi - x)^2}\right\} =$$

$$= \frac{2\zeta(x)\zeta(\xi, x) + \zeta^2(\xi, x)}{\zeta^2(x) + (\xi - x)^2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\left[\frac{2\zeta(x)\zeta(\xi, x) + \zeta^2(\xi, x)}{\zeta^2(x) + (\xi - x)^2}\right]^k \approx \frac{2\zeta(x)}{\zeta^2(x) + (\xi - x)^2}\zeta(\xi, x).$$

Завершуючи доведення, залишається відзначити, що

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\zeta(x)}{\zeta^2(x)+(\xi-x)^2}\zeta(\xi,x)d\xi=-\zeta(x)+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\zeta(x)}{\zeta^2(x)+(\xi-x)^2}\zeta(\xi)d\xi$$

звідки, посилаючись на (1.22), отримуєм потрібне твердження. ■

***Зауваження* 1.5.** Обравши у висновку 1.2 замість визначеного у фіксованій точці x значення $\zeta(x),\ x\in R^{(1)}$ будь-яке інше, скажімо, значення $\zeta(y)=h,\ h^-\le h\le h^+$ при $y\neq x$, отримаєм нове лінійне рівняння.

Дійсно, поклавши в виразі (1.16_4) $\zeta(x)=h$ й для зручності $z=0$ та згадавши, що [30, 58, 157]

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{(\xi-x)^2+h^2}d\xi=1,$$

оберемо величину h з множини Нумерова (1.20-1.21) і на основі (1.12) отримаємо одновимірне лінійне інтегральне рівняння Фредгольма 1-го роду для контактної поверхні з ядром Пуассона

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{(\xi-x)^2+h^2}\zeta(\xi)d\xi=u(x),\ u(x)=\frac{V_z(x)}{2\pi\gamma\sigma}.$$

Віднімаючи у останньому виразі зліва й справа h, або використовуючи початкове (1.12), отримаємо практично найзручніший вираз

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{(\xi-x)^2+h^2}\zeta(\xi,h)d\xi=v(x),\ \zeta(\xi,h)=\zeta(\xi)-h,\ v(x)=u(x)-h, \qquad (1.23_2)$$

що містить повільно спадаюче ядро Пуассона при $|\xi-x|\to\infty$.

***Зауваження* 1.6**. Для однозначного розв'язання рівняння (1.23_1) необхідно знати не лише праву частину $v(x)=v(x;\sigma,D)$ і густину шару σ (потрібні для вирішення рівняння (1.12)), а й значення "середньої" глибини h для однієї з точок контакту, від якої залежить оператор рівняння; це зауважив ще Нумеров[10].

***Зауваження* 1.7**. Рівняння ($1.23_{1,2}$) мають просте фізичне тлумачення в трактовці Маловичка [29, 58, с. 78]. Якщо аномальні маси сконденсувати на площину $\zeta=h$ і замінити їх простим шаром з поверхневою густиною $\sigma_n(\xi,h)=\sigma\zeta(\xi)$, гравітаційний ефект того шару в точках площини $\zeta=h$ дорівнює $V_z(\xi,h)=2\pi\gamma\sigma\zeta(\xi)$. Домноживши, наприклад, обидві частини рівнянь ($1.23_{1,2}$) на множник $2\pi\gamma\sigma$ і врахувавши щойно сказане, отримаєм загальновідомий інтеграл Пуассона

$$V_z(x,0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}V_z(\xi,h)\frac{h}{(\xi-x)^2+h^2}d\xi,$$

який дає розв'язок задачі Діріхле для рівняння Лапласа в напівплощині з граничними даними $\zeta(\xi,h),-\infty<\xi<\infty$.

Такий погляд на рівняння (1.23_i) дозволяє скористатись при їх вирішенні апаратом

---

[10] В Нумерова параметр h був і позаінтегральним членом (у нас він захований) й обирався без зв`язку зі значенням правої частини, тоді як в нелінійному рівнянні (1.4) позаінтегральний член є значенням шуканої функції в тій фіксованій точці осі, в якій береться значення правої частини $U(x)$.

аналітичного продовження гармонічних функцій в смугу $0 \le y \le h$ [33, 36, 79, 162]. Якщо немає підстав вважати даний контакт належним до класу $Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$, то перерахувавши поле з допомогою інтегралу Пуассона "вгору" на відповідну висоту, переведемо його в такий клас[11]. Це випливає з тлумачення Нумеровим лінеаризації (1.23) в термінах "конденсації мас", обмежених контактом (конденсована густина $\mu(\xi) = \lim_{\eta \to 0} \sigma\eta(\xi, x)$ простого шару) на допоміжну площину на глибині $h = \zeta(y)$ [58, с. 50]). Ми вже переконались, що подібна схема лінеаризації в дійсній області не представляє труднощів й для тривимірного простору; при цьому зберігаються всі характерні особливості поведінки розв'язку.

1.2.2. Про істотно обмежену множину. При чисельній реалізації розв'яз ку рівнянь (1.23_i) істотно, що їх ядра Пуассона дуже повільно спадають з ростом аргумента $|\xi - x|$ навіть за невеликих значень параметра. Для забезпечення задовільної точності розв'язків потрібно задавати функцію $u(x)$ на "майже не-скінченній множині" [29], що ускладнює обробку польових даних, отриманих, як правило, за традиційною методикою – на *істотно коротких* множинах значень, що не дозволяє отримати результат прийнятної точності безпосередньо з рівняння (1.23_i). Те ж саме справедливе для рівняння (1.9). На сьогодні існує альтернатива для подолання цієї вади:

$\rightarrow$ здійснити високоточну екстраполяцію значень $u(x)$ з *короткого* на *довгий* інтервал, після чого обчислити наближений розв'язок рівняння;

$\rightarrow$ знайти еквівалентне початковому рівнянню перетворення з швидко спадаю чим ядром, яке дозволить на *коротких* інтервалах точно обчислити деяку допоміжну функцію, яка забезпечить визначення наближення заданого рівняння з ґарантованою точністю.

Кожну з альтернатив втілено в життя (див. Коментарі) в теорії аналітичного продовження гармонічних функцій. Так, В.М. Страхов [102] запропонував використати для аналітичного продовження гармонічних функцій рівняння із швидко спадаючими ядрами на основі інтегралу Шварца для смуги [49]. Алгоритми наближеного обчислення контактної поверхні [87, 88], основані на інтеґральних перетвореннях із швидко спадаючими ядрами [29, 102], виявляється, ефективніші за точністю й швидкістю, ніж алгоритми на основі інтегралу Пуассона. Ми висвітлимо обидва напрямки, сподіваючись доповнити їх новими положеннями.

Розглядаючи частинний випадок структурної задачі – задачу визначення контактної границі $\zeta(\xi), \xi \in R^{(1)}$ за відомими значеннями вертикальної похідної $U_{x_k}(x)$ напруженості гравіполя на істотно обмежених множинах, введемо їх так.

Характеристика: В класичних методах аналітичного продовження на основі

---

[11] Іншою перевагою лінеаризованого рівняння контакту вважаємо простоту досліджень множини коректності й умов розв`язуваності, ефективності ітерацій, про що детальніше – в наступних розділах.

(1.23$_2$) інтегральні оператори задають континуально – від $-\infty$ до ∞, але при чисельних обрахунках провадять дискретизація інтегральних операторів, а чисельні значення вхідних даних задають на скінченних, хоч і великих проміжках (від $-l$ до $l, l \to \infty$) в кожній точці дискретної мережі. При цьому потрібно знати значення поля поза межами, на яких задано вхідну інформацію; загалом його враховують приблизно, задаючи постійний (нульовий) рівень поля, що позначається на точності обліку.

При обчисленні за інтегральним оператором із швидкоспадним ядром у тій же дискретній мережі з приблизним врахуванням краєвих ефектів й *тією ж точністю* обчислень (квадратур) треба знати вхідні дані, виміряні з однаковою точністю в обох випадках, на *істотно меншому* (на порядок) інтервалі, порівняно з інтервалом задання поля для обчислень за оператором (1.23$_2$). Через істотно меншу кількість дискретних точок поля для здобуття тієї ж кількості інформації значно менше похибок вноситься в модель за рахунок її загрублення при врахуванні крайових ефектів – в цьому головна перевага пропонованого методу над класичним. Істотне скорочення інтервалу задання вхідних даних зберігається і за *неперервного* їх задання певною досить гладкою функцією* – наразі сукупність всіх точок інтервалу разом з граничними точками, створює, згідно означення** *множину* задання вхідних даних. Саме в такому контексті будем говорити про необмежену $(-\infty,\infty)$, *обмежену* (в тексті – майже необмежену) та *істотно обмежену* множини. Строге математичне означення цих множин, яке фігуруватиме у подальшому викладі, виходячи з постановки задачі, запозичимо з праці [93, с. 228] з наступним уточненням.

Означення: *Нехай потрібно визначити в рівномірній дискретній мережі точок x_k з постійним кроком Δx деякий фрагмент контактної поверхні $\zeta(x)$ на інтервалі $[x_1, x_2]$ за виміряними з відомою точністю $\delta, \|u(x)-u_\delta(x)\|_c \le \delta$ значеннями поля $u_\delta(x)$ в інтервалі $x \in [x_0, x_3]$ на мережі вузлів x_k, причому $[x_1, x_2]$ є власною підмножиною інтервалу $[x_0, x_3]$.*

Для визначення певного наближення фрагменту $\zeta(x), x \in [x_1, x_2]$ за допомогою деякого ітераційного процесу (1) із [90] для рівняння (1.15) в ході скінченновимірної апроксимації прямого оператора $A_a(\zeta; x)$ обчислюють таке значення границі інтегрування a для цього оператора, при якому похибка його апроксимації не перевищує величини, кратної похибці поля [93, с. 230] $\|\varepsilon(x;n)\| + \|\varepsilon(x;a)\| \le l\delta,\ l \le 5$, де $\varepsilon(x,a)$ – точність скінченновимірного проектування, тобто похибка апроксимації

$$\|\varepsilon(x;a)\|_C = \frac{1}{\pi}\left|\pi\left(h^+ - h^-\right) - a\ln\frac{a+\left(h^+\right)^2}{a+\left(h^-\right)^2} - 2h^\pm \operatorname{arctg}\frac{a}{h^\pm}\right|,$$

---

* Дискретні вхідні дані можна відновити в неперервному вигляді, помістивши їх під інтеграл в рівняння Ейлера з інтегральним оператором 1-го роду; заодно досягається згладжування похибок вхідних даних.

** Множина в гільбертовім просторі – відрізок, що єднає два елементи $x_1, x_2 \in H$, якщо вона при цьому складена всіма елементами вигляду $\alpha x_1 + \beta x_2,\ \alpha \ge 0,\ \beta \ge 0,\ \alpha + \beta = 1;$ через інші поняття вона не визначається.

а $\varepsilon(x,n)$ – точність чисельного інтегрування, тобто оцінка додаткового члена чисельної квадратури [16] при обмеженнях (1.20-1.21)

$$\|\varepsilon(x;n)\|_C \le \frac{c}{(2n-1)^2},\ c=\frac{2a^3dh^+}{3(h^-)^2}\cdot\left|1+\frac{(1+b^2)(h^+)^3+12b(h^-)^3+8h^+(h^-)^2}{8d(h^-)^4}\right|.$$

Допускаючи, що при вирішенні поставленої *задачі* похибка $\varepsilon(x;a)$ не повинна перевищувати деякого числа $\varepsilon_0>0$, з умови $\|\varepsilon(x;a)\|\le\varepsilon_0$ визначають значення a межі інтегрування, яке забезпечує гарантовану точність обчислень контакту. Якщо при цьому значення поля $u_\delta(x)$ задано на інтервалі $[x_0,x_3]$ так, що має місце вкладання $[x_0-a-\Delta x/2, x_3-a-\Delta x/2]\ge[x_1,x_2]$, то за ними відновлюють контакт із задовільною точністю, а якщо їх задано на інтервалі, що відрізок $[x_0-a-\Delta x/2, x_3-a-\Delta x/2]$ складає лише власну частину відрізку $[x_1,x_2]$, то з ітерацій [90] для (1.15) неможливо віднайти задовільне наближення. У першому випадку інтервал $[x_0,x_3]$ називаємо *майже необмеженим*, а в іншому – *істотно обмеженим*.

Ясна річ, при заданні поля на *істотно обмеженому* інтервалі не можна реалізувати традиційні способи визначення контакту. Перспективними у цій ситуації будуть способи, які мають підвищену стійкість і забезпечують обчислення послідовних наближень, що збігаються швидше за вивчені [91]. Кілька таких способів наведено в працях [90, 92]. Розгляньмо їх детальніше.

1.2.3. Інтеграл Шварца для смуги. Перш ніж висвітлити пропозицію В. Страхова, розгляньмо детальніше шляхи отримання інтегральних перетворень зі швидко спадаючими ядрами. Згідно [92], всі вони є частинним випадком інтегралу Шварца для смуги [49]. Загалом його отримано як розв'язок задачі про відновлення в одиничному колі аналітичної функції, дійсна частина якої на окружності набуває заданих значень в точках її неперервності. Для зведення її до задачі для смуги досить конформно відобразити коло на смугу Π. Сформулюймо строго відповідну задачу.

Постановка задачі. Нехай на деяких прямих $z_1=-ih$ та $z_2=ih, h>0$, що обмежують смугу $\Pi=\{<z>:-\infty<\operatorname{Re}z<\infty;-h<\operatorname{Im}z<h\}$ комплексної площини $z=x+iy$, задано значення обмежених функцій $u^-(x)=u(x-ih)$ й $u^+(x)=u(x+ih)$, неперервних всюди, крім скінченної кількості точок $z_k^-=x_k-ih, k=1,2,\dots n_1$ й $z_k^+=x_k+ih,\ k=1,2,\dots n_2$, де вони мають розриви 1-го роду; природно, допускаємо, що границі $u^-(x)$ й $u^+(x)$ при $x\to\pm\infty$ існують й скінченні. На цих умовах треба знайти аналітичну у смузі Π функцію $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, дійсна частина $u(x,y)$ якої на прямих z_1 й z_2 набуває відповідних заданих значень граничних функцій $u^-(x)$ й $u^+(x)$ у кожній точці їх неперервності.

Розв'язок знаходимо в два етапи: спочатку для кола, а потім для смуги через конформне перетворення кола в смугу.

1. Дійсна і уявна частини будь-якої аналітичної в деякій області функції є гармонічними функціями; її дійсна частина однозначно відновлюється за своїми граничними значеннями як розв'язок задачі Діріхле, а уявну частину визначають на основі співвідношень Коші-Рімана з точністю до сталої. Шукану функцію $u(\xi,\eta)=u(\zeta), \zeta = re^{i\varphi}$ в одиничному колі $|\zeta|<1$ за її граничними значеннями $u(\omega), \omega = e^{it}$ на окружності $|\omega|=1$ можна подати через інтеграл Пуассона

$$u(\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(e^{it}\right)\cdot\frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\varphi)+r^2}dt.$$

Через те, що $\dfrac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\varphi)+r^2}=\operatorname{Re}\dfrac{\omega+\zeta}{\omega-\zeta}$, функція $u(\zeta)$ є дійсною частиною виразу

$$f(\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\omega)\cdot\frac{\omega+\zeta}{\omega-\zeta}dt+iC, \omega = e^{it}. \tag{1.24}$$

Ця функція аналітична в колі $|\zeta|<1$, що випливає з аналітичності по ζ в колі і неперервності по ω на окружності $|\omega|=1$ підінтегральної функції та рівномірної збіжності у цьому колі самого інтегралу. Покладаючи в інтегралі $\zeta=0$ й застосовуючи теорему про середнє значення гармонічної функції, отримуємо

$$u(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\omega)dt,$$

тому стала в відношенні (1.24) визначається рівністю $C=v(0)$. Розділивши в інтегралі дійсну і уявну частини, знайдемо вираз гармонічної функції $v(\zeta)$ через граничні значення спряженої в смислі умов Коші-Рімана до неї функції

$$v(\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(e^{it}\right)\cdot\frac{2r\sin(\varphi-t)}{1-2r\cos(\varphi-t)+r^2}dt+C.$$

2. Для завершення розв'язку поставленої задачі лишилось конформно відобразити коло $|\zeta|<1$, для якого розв'язок вже знайдено, на смугу Π: $-h<\operatorname{Im} z<h$ за допомогою функції $\zeta=\operatorname{th}(\pi z/4h)$, яка переводить нижній й верхній *півоколи* відповідно в нижній z_1 й верхній z_2 краї смуги Π. Підставляючи її в вираз (1.24), після нескладних перетворень отримуємо остаточний розв'язок даної задачі:

$$f(z)=\frac{1}{2h}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u^+(t)+u^-(t)}{2}\cdot\left(\operatorname{ch}\frac{\pi(t-z)}{2h}\right)^{-1}dt-\frac{i}{2h}\operatorname{sh}\frac{\pi z}{2h}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u^+(t)-u^-(t)}{2}\cdot\left(\operatorname{ch}\frac{\pi t}{2h}\cdot\operatorname{ch}\frac{\pi(t-z)}{2h}\right)^{-1}dt+iC.$$

Цей вираз у дещо зміненому вигляді отримували ще Д. Граве в 1896 р. та С. Палатіні [92] у 1915 р. Нескладні тригонометричні перетворення, спрямовані на виділення дійсної частини цього виразу при $y=0$ переконують нас, що формули В. М. Страхова [102], О.А. Соловйова [32] є частинними випадками цього подання:

$$f(z)=\frac{1}{4h}\int_{-\infty}^{\infty}u^{-}(t)\frac{\cos\frac{\pi y}{2h}}{\operatorname{ch}\frac{\pi(t-x)}{2h}+\sin\frac{\pi y}{2h}}dt+\frac{1}{4h}\int_{-\infty}^{\infty}u^{+}(t)\cdot\frac{\cos\frac{\pi y}{2h}}{\operatorname{ch}\frac{\pi(t-x)}{2h}-\sin\frac{\pi y}{2h}}dt+$$

$$+\frac{i}{4h}\cdot\left[\int_{-\infty}^{\infty}u^{-}(t)\cdot\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi t}{2h}\cdot\sin\frac{\pi y}{2h}+\operatorname{sh}\frac{\pi x}{2h}}{\operatorname{ch}\frac{\pi t}{2h}\cdot\left(\operatorname{ch}\frac{\pi(t-x)}{2h}+\sin\frac{\pi y}{2h}\right)}dt+\int_{-\infty}^{\infty}u^{+}(t)\cdot\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi t}{2h}\cdot\sin\frac{\pi y}{2h}-\operatorname{sh}\frac{\pi x}{2h}}{\operatorname{ch}\frac{\pi t}{2h}\cdot\left(\operatorname{ch}\frac{\pi(t-x)}{2h}-\sin\frac{\pi y}{2h}\right)}dt\right]+iC.$$

***Зауваження* 1.8.** Якщо гілки $u^{-}(x)$ й $u^{+}(x)$ аналітичної функції $f(z)$ мають розриви першого роду, то вищезгадана задача теж має розв'язок у вигляді

$$F(z)=f(z)+\sum_{k=1}^{n_1+n_2}\frac{h_k}{\pi}\cdot\arg(z_k-z)$$

на відповідних гілках $U^{-}(x)$ й $U^{+}(x)$ функції $U(z)=u(z)-\sum_{k=1}^{n}\frac{h_k}{\pi}\cdot\arg(z_k-z)$, неперервної всюди на границі $\partial\Pi$ смуги $\prod=\{<z>:-\infty<\operatorname{Re}z<\infty;-h<\operatorname{Im}z<h\}$.

Геофізичне застосування. Останній вираз для $f(z)$ дає змогу звести задачу аналітичного продовження гармонічної функції $u(x,y)$ в горизонтальний шар $-h\le y\le 0$ на рівень $y=-h$ при заданих функціях $u(x,0)$ й $u(x,h)$ до розв'язання інтеґрального рівняння з швидко спадаючим на нескінченності ядром. Ідея Страхова [102] полягає в обчисленні функції $u(x,-h)=2S^{+}(x,h)-u(x,h)$, де $S^{+}(x,h)$ є розв'язком інтеґрального рівняння першого роду з швидко спадаючим ядром:

$$\frac{1}{2h}\int_{-\infty}^{\infty}S^{+}(t,h)\cdot\left(\operatorname{ch}\frac{\pi(t-x)}{2h}\right)^{-1}dt=u(x,0). \tag{1.25}$$

Одначе, якщо значення $u(x,h)$ не задано безпосередньо, ця ідея втрачає привабливість, оскільки для їх визначення застосовується знову ж таки "повільний" інтеграл Пуасона, недоліки якого перелічено вище[12].

На практиці завжди доводиться мати справу з обмеженим обсягом даних, тому для наближеного до реалій тлумачення аномалій найкращу перспективу мають саме конструкції типу (1.25). Вкажімо на деякі з них.

① Першу отримаємо із перетворення дійсної частини інтегралу Шварца (1.25) при $z=x$, у вигляді

$$\frac{1}{4h}\int_{-\infty}^{\infty}u(t,-h)\cdot\left(\operatorname{ch}\frac{\pi(t-x)}{2h}\right)^{-1}dt=u(x,0)-\frac{1}{4h}\int_{-\infty}^{\infty}u(t,h)\cdot\left(\operatorname{ch}\frac{\pi(t-x)}{2h}\right)^{-1}dt.$$

Підставляючи в праву частину цього відношення вираз (1.23_2) у вигляді

[12] Для забезпечення гарантованої точності обчислень з інтегралом Пуассона потрібно знати значення поля на майже необмежених інтервалах, значно більших, ніж потрібно для досягнення тієї ж точності обчислень за формулою (1.25); якщо наявні необхідні дані, то аналітичне продовження доцільно здійснити через інтеграл Пуассона, тим паче, що швидкість збіжності таких послідовних наближень майже співставна із швидкістю наближень (1.25) і одразу досягається результат, а в (1.25) потрібні додаткові обчислення.

$$u(x,h)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{(\xi-x)^2+h^2}\cdot u(\xi,0)d\xi\,,$$

знайдемо для обчислення функції $u(x,-h)$ таке інтегральне рівняння

$$\frac{1}{4h}\int_{-\infty}^{\infty}u(t,-h)\cdot\left(\operatorname{ch}\frac{\pi(t-x)}{2h}\right)^{-1}dt=w(x),\text{ де }\ w(x)=u(x,0)-\int_{-\infty}^{\infty}u(\xi+x,0)\cdot K(\xi,h)d\xi, \quad (1.26)$$

$$K(\xi,h)=\frac{1}{4h}\int_{0}^{\infty}\left(\operatorname{ch}\frac{\pi t}{2h}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{1}{h^2+(x-t)^2}+\frac{1}{h^2+(x+t)^2}\right)dt\,. \quad (1.27)$$

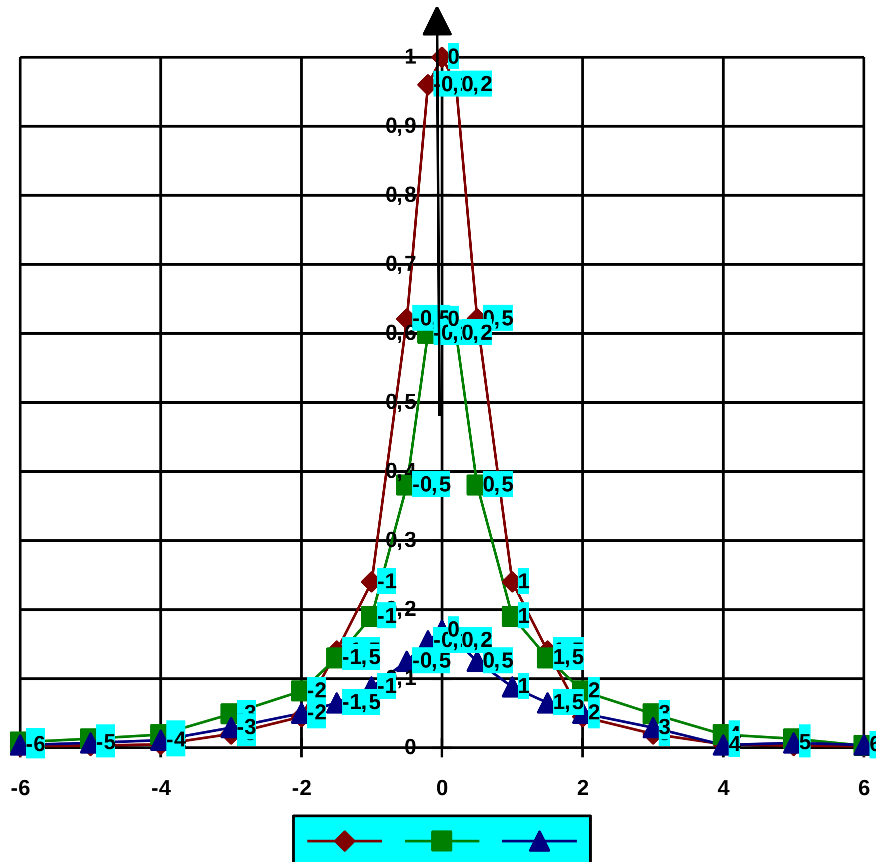


Рис. 1.8. Поведінка інтегральних ядер Шварца, $K(x,h)$ і Пуассона.

Очевидно, ядро $K(x,h)$ спадає на нескінченності швидше за ядро інтеграла Пуассона, але повільніше ядра інтегралу Шварца (див. рис. 1.4). Тому алгоритм аналітичного продовження у горизонтальний шар на основі рівняння (1.26) має перевагу над алгоритмом на основі рівняння (1.23_2).

***Зауваження* 1.9.** Оскільки має місце співвідношення

$$\frac{1}{2h}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\operatorname{ch}\frac{\pi(t-x)}{2h}\right)^{-1}dt=1,$$

то будь-яка норма оператора рівняння (1.26) рівна одиниці, а будь-яка норма оператора рівняння (1.27) менша за неї; цю особливість можна ефективно використати при пошуку стійкого чисельного розв’язку рівняння (1.26).

При реалізації чисельного розв'язку рівняння (1.26) суттєву роль відіграє обчислення функції (1.27), тому представимо ще два її еквівалентні подання:

$$K(x,h)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos xt}{1+e^{2ht}}\,dt,\quad K(x,h)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n+1}\cdot\frac{2nh}{x^2+(2nh)^2}. \qquad (1.28)$$

Перше з них обчислюємо елементарно, використовуючи тотожність [29]

$$\int_0^\infty \frac{\cos tx}{\mathrm{ch}xh}\,dx=\pi\left(2h\,\mathrm{ch}\frac{\pi t}{2h}\right)^{-1},h>0,$$

а інше випливає з першого, якщо розкласти в ряд функцію $\left(1+e^{2ht}\right)^{-1}$, $t>0$ і проінтегрувати його, врахувавши розбіжність ряду при $t=0$.

Продовжимо розгляд конструкцій із швидко спадаючими ядрами.

② Якщо з вимірювань відомі значення на рівні $y=0$ "горизонтальної" $H_a(x,0)$ і "вертикальної" $Z_a(x,0)$ складових магнітного поля Землі, тоді з рінянь $f(z)$ при $z=x$ чи (1.25) при $y=0$ отримуємо систему лінійних інтегральних рівнянь першого роду

$$\frac{1}{2h}\int_{-\infty}^{\infty} S^+(t,h)\cdot\left(\mathrm{ch}\frac{\pi(t-x)}{2h}\right)^{-1}dt=u(x,0),$$

$$\frac{1}{2h}\int_{-\infty}^{\infty} S^-(t,h)\cdot\left(\mathrm{ch}\frac{\pi t}{2h}\,\mathrm{ch}\frac{\pi(t-x)}{2h}\right)^{-1}\mathrm{sh}\frac{\pi x}{2h}\,dt=v(x,0) \qquad (1.29)$$

для обчислення значень $S^+(x,h)=\dfrac{u(x,-h)+u(x,h)}{2}$ й $S^-(x,h)=\dfrac{u(x,-h)-u(x,h)}{2}$ за заданими на рівні $S^-(x,h)$ значеннями гармонічної функції $u(x,0)=Z_a(x,0)$, $H_a(x,0)$ та спряженої до неї функції $v(x,0)=H_a(x,0)$, $Z_a(x,0)$. Якщо розв'язки системи (1.29) знайдено, значення аналітично продовженої на рівні $y=-h$ й $y=h$ функції $u(x,y)$ легко знайдемо з виразів

$$u(x,-h)=S^+(x,h)+S^-(x,h),\ u(x,h)=S^+(x,h)-S^-(x,h) \qquad (1.30)$$

Обираючи за вихідні дані спочатку функції $u(x)=H_a(x)$, $v(x)=Z_a(x)$, а потім $u(x)=Z_a(x)$, $v(x)=H_a(x)$, визначимо за цим алгоритмом на рівнях $y=h$ й $y=-h$ обидві складові магнітного поля.

③ За відсутності однієї із спряжених гармонічних функцій для аналітичного продовження пропонуєм ще одну конструкцію з швидко спадаючими ядрами. Щоб виразити її аналітично, обчислимо Фур'є-образ інтегралу Пуассона, як $u(\omega,h)=u(\omega,0)\cdot e^{-|\omega|h},h>0$. Звідси негайно отримуєм наступні зображення

$$u(\omega,0)=\frac{u(\omega,-h)+u(\omega,h)}{2}\cdot\left(\mathrm{ch}|\omega|h\right)^{-1},\quad u(\omega,0)=\frac{u(\omega,-h)-u(\omega,h)}{2}\cdot\left(\mathrm{sh}|\omega|h\right)^{-1}.$$

Повертаючись до оригіналів цих зображень з врахуванням відомих відношень [29, с. 207]

$$\int_0^\infty \frac{\cos\omega x}{\mathrm{ch}\omega h}\,d\omega=\pi\left(2h\,\mathrm{ch}\frac{\pi x}{2h}\right)^{-1},\quad \int_0^\infty \frac{\sin\omega x}{\mathrm{sh}\omega h}\,d\omega=\frac{\pi}{2h}\cdot\mathrm{th}\frac{\pi x}{2h},h>0,$$

отримуємо наступний алгоритм (див. подробиці в додатку А)

$$\frac{1}{2h}\int_{-\infty}^{\infty} S^{+}(t,h)\cdot\left(\mathrm{ch}\frac{\pi(t-x)}{2h}\right)^{-1} dt = u(x,0),\quad \frac{1}{2h}\int_{-\infty}^{\infty} S^{-}(t,h)\cdot \mathrm{th}\frac{\pi(t-x)}{2h} dt = u(x,0), \qquad (1.31)$$

де через $S^{+}(x,h)$ і $S^{-}(x,h)$ позначено, відповідно, півсуму і піврізницю функцій $u(x,-h)$ і $u(x,h)$. Розв’язки (1.31) породжують за формулою (1.30) аналітично продовжені значення функції $u(x,h)$ відповідно на рівнях $y=-h$ і $y=h$.

Чисельна реалізація. Усі три подання (1.27) і (1.28) функції ядра $K(x,h)$ еквівалентні між собою з точки зору неперервної математики, але з позицій машинної арифметики, яка оперує скінченним числом бітів, зовсім не еквівалентні як за точністю, так і за швидкодією отриманих результатів. Цей феномен загалом характерний для обчислення функціоналів від періодичних і експоненційних функцій.

1. Одним із суттєвих моментів обчислення на ПК інтегралів на зразок (1.27) чи (1.28) є вибір верхньої межі інтегрування $a<\infty$. Якби не жорсткі обмеження на множину раціональних чисел Q, характерну для конкретного ПК, то межу a можна було б вибрати, виходячи з необхідної точності отримання чисел $K(x,h)$. Наприклад, за умови, що похибка $\Delta K(h)=\max\limits_{x}|K(x,h)|$ числа $K(x,h)$ в формулі (1.28) не перевищуватиме порогу ε, можна визначити верхню межу у вигляді:

$$a \geq \ln\left(e^{2\varepsilon h}-1\right)^{-1}. \qquad (1.32)$$

Проте число a при цьому могло виявитись таким, що число e^{α_0}, де $\alpha_0=\pi a/2h$ чи $\alpha_0=2ha$, залежно від формул (1.27) чи (1.28), вийшло б за межі скінченної множини Q комп’ютерних чисел і ми не змогли б визначити числа $K(x,h)$ з точністю ε. Відтак, граничну точність чисел $K(x,h)$ в першу чергу визначає число $\alpha_0=\max\alpha$ за умови $e^{\alpha}\in Q$ у вигляді залежності:

$$\Delta K(h) \leq \frac{1}{2h}\ln\left(1+e^{-\alpha_0}\right). \qquad (1.33)$$

Величина α_0 для різних ПК невелика (в i486 $\alpha_0\approx 307.5$ з подвійною точністю). При вирішенні конкретної задачі межу інтегрування обирають на основі відомостей про похибки вимірів, враховуючи залежності (1.32-1.33). Для високоточних вимірів межу інтегрування a оцінюєм із (1.32), а число $\varepsilon=\Delta K(h)$ знаходимо з (1.33). В разі квадратурної апроксимації формулою прямокутників отримуємо для обчислень інтегралів (1.26) і (1.27) наступні скінченні суми:

$$K_1(x_i,h)=\frac{\Delta t}{4\pi}\sum_{j=1}^{n_1}\left(\mathrm{ch}\frac{\pi t_j}{2h}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{1}{h^2+(x_i-t_j)^2}+\frac{1}{(x_i+t_j)^2+h^2}\right), \qquad (1.34_1)$$

$$K_5(x_i,h)=\frac{\Delta t}{\pi}\sum_{j=1}^{n_2}\frac{\cos x_i t_j}{1+e^{2ht_j}}, \qquad (1.34_2)$$

де $n_1=\mathrm{int}\left(\frac{2h\alpha_0}{\pi\Delta t}\right)$, $n_2=\mathrm{int}\left(\frac{\alpha_0}{2h\Delta t}\right)$, а Δt – крок чисельного інтегрування. Ці суми отримано з урахуванням експоненційного затухання підінтегральної функції.

2. Ще один суттєвий момент обчислень на ПК інтегралів типу (1.28) полягає у врахуванні осциляції підінтегральної функції. Зауважуючи періодичність косинуса, перепишем останній інтеграл (1.28) як

$$\int_0^\infty \frac{\cos xt}{1+e^{2ht}}dt = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\cos xt}{1+e^{2ht}}dt, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{e^{-ht}}{e^{ht}+e^{-ht}}\cos xt dt \end{cases}, \text{ або } \int_0^a \frac{\cos xt}{1+e^{2ht}}dt = \begin{cases} \sum_{n=0}^{n_3} \int_0^\pi \frac{\cos(n\pi+t)x}{1+e^{2(n\pi+t)h}}dt, \\ \sum_{n=0}^{n_4} \int_0^\pi \frac{e^{-(n\pi+t)h}}{e^{(n\pi+t)h}+e^{-(n\pi+t)h}}\cos(np+t)xdt, \end{cases}$$

де $n_3 = \mathrm{int}\left(\frac{\alpha_0}{2\pi h}\right), n_4 = \mathrm{int}\left(\frac{\alpha_0}{\pi h}\right)$. Звідси отримуємо ще дві квадратурні формули для обчислень інтегралу (1.28):

$$K_2(x_i,h) = \frac{\Delta t}{\pi}\sum_{n=0}^{n_3}\sum_{k=1}^{m} \frac{\cos\pi\left(n+\frac{2k-1}{m}\right)x_i}{1+e^{2\pi\left(n+\frac{2k-1}{m}\right)h}}, \quad (1.34_3)$$

$$K_3(x_i,h) = \frac{\Delta t}{\pi}\sum_{n=0}^{n_4}\sum_{k=1}^{m} \frac{e^{-\pi\left(n+\frac{2k-1}{m}\right)h}}{e^{\pi\left(n+\frac{2k-1}{m}\right)h} e^{-\pi\left(n+\frac{2k-1}{m}\right)h}}\cos\pi\left(n+\frac{2k-1}{m}\right)x_i\,. \quad (1.34_4)$$

Зауваживши, що кожен наступний член ряду в (1.28) менший за попередній, перетворімо його частинну суму, що містить $2m$ членів; після спрощення отримуемо вираз

$$K_4(x_i,h) = \frac{2h}{\pi}\sum_{k=1}^{m} \frac{4k(4k-2)h^2 - x_i^2}{\left[x_i^2+(4k-2)h^2\right]\left[x_i^2+(4k)^2h^2\right]}. \quad (1.34_5)$$

Надалі опиратимемось на формулу (1.34$_1$); інші не є чисельно рівнозначними їй, що було доведено на чисельних прикладах [92]. По цих міркуваннях виведемо робоче рівняння контакту для випадку задання значень поля на *істотно обмеженому* профілі. В процесі дослідження ми активно користуватимемось апаратом перетворень Фур'є, що є звичайним при розв'язанні контактних задач у рамках аналітичного продовження [32, 77, 113, 159-166].

***Зауваження* 1.10.** Для забезпечення визначеності і однозначності перетворень Фур'є над елементами з класу $Nu^{(1,\alpha)}(1,D)$ хоча б у смислі узагальнених функцій звузьмо цей клас до класу $Nu_2^{(1,\alpha)}(1,D) \subset St_2^{(1,\alpha)}(1,D)$, елементи якого підкорено умові (1.21).

Визначмо дію цих перетворень над простором *узагальнених функцій*.

***Означення*:** взаємно-однозачну відповідність між парою (ζ,u) і локально інтегровною функцією $u(x)$ над простором $Nu^{(1,\alpha)}(1,D) \in \overline{D}$ встановлює лінійний функціонал $(\zeta,u) = \int_{-\infty}^{\infty}\zeta(x)u(x)dx$ породжений *локально інтегровною* в $R^{(1)}$ функцією $u(x)$, $x \in R^{(1)}$ і фіксованою основною $\zeta(x) \in D$ (інтеграл існує у смислі головного значення). Такий функціонал називають регулярною узагальненою функцією $u(x)$ над $Nu^{(1,\alpha)}(1,D)$.

Одним з різновидів узагальнених функцій такого типу є дельтоподібна послідовність *локально*

інтегровних функцій вигляду $u(x)=\frac{1}{\pi}\frac{\delta}{x^2+\delta^2}$, $\delta\to+0$; її дія на неперервну *одиничну* функцію $f=1(x), -\infty<x<\infty$ при $\delta\to+0$

$$\lim_{h\to+0}(u,f)=\frac{1}{\pi}\left\{\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}+\int_{+\varepsilon}^{\infty}\right)f\cdot\frac{\delta}{\delta^2+x^2}dx\right\}+\frac{1}{\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}f\,\frac{\delta}{\delta^2+x^2}dx=\frac{2}{\pi}\lim_{\delta\to+0}\operatorname{arctg}\frac{\delta}{\varepsilon}=2$$

незалежна від величини $\delta>0$, а дія на іншу неперервну *локально інтегровну* на осі Ox функцію $\zeta(x)$ залежить від параметра[13] δ:

$$\lim_{\delta\to+0}(\zeta,u)=\lim_{\delta\to+0}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\zeta(x)\frac{\delta}{\delta^2+x^2}dx=\frac{1}{\pi}\lim_{\delta\to0}\lim_{\varepsilon\to+0}\left\{\left(\int_{-\infty}^{\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{\infty}\right)\zeta(x)\frac{\delta}{\delta^2+x^2}dx\right\}+$$

$$+\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\zeta(x)\frac{\delta}{\delta^2+x^2}dx=\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{\delta\to+0}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\zeta(x)\frac{\delta}{\delta^2+x^2}dx=\frac{2}{\pi}\lim_{\varepsilon\to0}\zeta(\theta\varepsilon)\lim_{h\to+0}\operatorname{arctg}\frac{\varepsilon}{\delta}=\zeta(0), 0\le\theta\le1,\ \varepsilon>0.$$

(за теоремою про середнє значення інтегралу; один з множників його підінтегральної функції обмежений в $R^{(1)}$, інший не змінює знаку, $\frac{\delta}{\delta^2+x^2}>0$ $\delta\to+0$). Розглянута послідовність л*окально інтегровних* функцій ставить в однозначну відповідність функції $\zeta(x)$ її значення в точці $x=0$, чим визначає на множині узагальнених функцій ще один об'єкт – дельта-функцію Дірака як *слабку границю* послідовності

$$\frac{1}{\pi}\lim_{\delta\to0}\frac{\delta}{\delta^2+(\xi-x)^2}=\frac{1}{2\pi}\lim_{\delta\to0}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\delta|\omega|}\cdot e^{i\omega(\xi-x)}d\omega=2\times\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega(\xi-x)}d\omega=\delta(\xi-x).$$

Формально дію цього функціоналу на основні функції $\zeta(x)$ характеризує рівність $(\zeta(x),\delta(x))=\zeta(0)$, або на прикладі перетворення Фур'є:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\zeta(\omega)\cdot e^{i\omega x}d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega(\xi-x)}d\omega\right)\zeta(\xi)d\xi=2\pi(\delta(\xi-x),\zeta(x))=2\pi\zeta(x).$$

На основі тотожності $\int_0^{\infty}\cos\omega x\,e^{-\omega\delta}d\omega=\frac{\delta}{\delta^2+x^2}, \delta>0$ δ-подібну послідовність $\{u\}$ подають у вигляді $u=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\cos\omega x\,e^{-\omega\delta}d\omega$, згідно якого пару (ζ,u) зображують таким ланцюжком еквівалентних співвідношень

$$\zeta(x)=\lim_{\delta\to+0}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\zeta(\xi,\delta)\frac{\delta}{\delta^2+(\xi-x)^2}d\xi=\lim_{\delta\to+0}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\zeta(\xi,\delta)d\xi\int_0^{\infty}\cos\omega(\xi-x)e^{-\omega\delta}d\omega=$$

$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\zeta(\xi,0)d\xi\int_0^{\infty}\cos\omega(\xi-x)d\omega$, який відкриває шлях до еквівалентного подання будь-якої послідовності з δ-подібним ядром; ми не раз цим скористаємось.

1.2.4. Лінеаризація через інтеграл Шварца. Вивчаючи властивості інтеґрального рівняння (1.31) першого роду з метою застосування його в задачі обчислення контакту, будемо тлумачити останню як задачу аналітичного продовження через їх еквівалентність. Оберімо значення h з інтервалу $[h^+,h^-]$, де $h^-=\inf\zeta(x), h^+=\sup\zeta(x)$ та

[13] В цьому виразі суттєві не лише варіації параметрів ε й δ, а й порядок граничних переходів при них; при іншому варіанті стремління їх до точки (0,0) визначити розумно дію δ-функції неможливо.

задаймо функцію $u(x,0)$ і фіктивний контакт $\zeta(x,h)$ на висоті h над профілем спостережень.

У такому разі для елементів класу $Nu_2^{(1,\alpha)}(1,D)$, згідно описаного вище, має місце теорема:

Теорема 1.1. *Якщо розв'язок $\zeta(x)$ нелінійного інтегрального рівняння* (1.4) *для контактної поверхні належить до $Nu_2^{(1,\alpha)}(1,D)$, то функція*

$$\zeta(x,h)=S^{+}(x,h)+S^{-}(x,h), \tag{1.35}$$

що визначається як сума розв'язків лінійних інтегральних рівнянь 1-го роду (1.31) *при $t=\xi$, відрізняється від розв'язку $\zeta(x)$ не більше, ніж на квадрат відхилення $\zeta(x,h)=\zeta(x)-h$, $x\in R^{(1)}$, $h^{-}\le h\le h^{+}$.*

Доведення. З теореми Нумерова, висновку 1.2 і *зауваження* 1.4 випливає, що вкладання $\zeta(x)\in Nu_2^{(1,\alpha)}(1,D)$ має наслідком відношення (1.23_1) для визначення лінійного наближення $\zeta(x,h)$ точного розв'язку $\zeta(x)$. За традицією, закладеною у [113, 117], для досягнення мети введемо допоміжну функцію (фіктивний контакт) $\zeta(x,-h)$, визначену інтегралом Пуассона на глибині $-h$ (*зауваження* 1.5)

$$\bar{\zeta}(x,-h)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{(\xi-x)^2+h^2}\cdot v(\xi)d\xi\,, \tag{1.36}$$

і обчислимо перетворення Фур'є (введене аналогічно [32, с. 62-69]) від обох частин рівностей (1.23_1) й (1.36), отримавши при цьому спряжені співвідношення:

$$\zeta_F(\omega,h)=v_F(\omega)\cdot e^{\omega h},\quad \bar{\zeta}_F(\omega,-h)=v_F(\omega)e^{-\omega h},\quad \omega\ge 0 \tag{1.37}$$

Визначмо на основі цих співвідношень функції

$$S^{+}(\omega,h)=\frac{1}{2}\left[\zeta_F(\omega,h)+\bar{\zeta}_F(\omega,-h)\right],\; S^{-}(\omega,h)=\frac{1}{2}\left[\zeta_F(\omega,h)-\bar{\zeta}_F(\omega,-h)\right],$$

[32, с. 248], що дозволяє виразити Фур'є-образ фіктивного контакту на основі (1.36) у вигляді, аналогічному до (1.35), тобто $\zeta_F(\omega,h)=S^{+}(\omega,h)+S^{-}(\omega,h)$.

Здійснивши над ним обернене перетворення Фур'є, отримуємо одразу (1.35); чисельними похибками такої операції через скінченність профілю $u(x)$ можна знехтувати. Виразимо на базі виразу (1.37) функції $S^{+}(\omega,h)$ і $S^{-}(\omega,h)$ через Фур'є-образ поля, внаслідок чого отримуємо

$$v_F(\omega)=S^{+}(\omega,h)\cdot(\mathrm{ch}\omega\mathrm{h})^{-1},\quad \bar{v}_F(\omega)=S^{-}(\omega,h)\cdot(\mathrm{sh}\omega\mathrm{h})^{-1}.$$

З цих відношень обернене перетворення для першої з формул приводить нас до вигляду [див. 33, с. 236]:

$$v(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}v_F(\omega)\cdot e^{i\omega x}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(\mathrm{ch}\omega\mathrm{h})^{-1}\cdot e^{i\omega x}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}S^{+}(\xi,h)\cdot e^{-i\omega\xi}d\xi=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S^{+}(\xi,h)d\xi\int_{-\infty}^{\infty}(\mathrm{ch}\omega h)^{-1}\cdot e^{-i\omega(\xi-x)}d\omega=\frac{1}{2h}\int_{-\infty}^{\infty}S^{+}(\xi,h)\cdot\left(\mathrm{ch}\,\frac{\pi(\xi-x)}{2h}\right)^{-1}d\xi$$

Усі інтеграли тут слід розуміти в смислі головного значення, тобто $\int\limits_{-\infty}^{\infty} = \lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_{-A}^{A}$, на відміну від звичайних $\int\limits_{-\infty}^{\infty} = \lim\limits_{A\to\infty, B\to\infty}\int\limits_{-A}^{B}$.

Аналогічний вираз, що відрізняється лише гіперболічною функцією, справедливий для другої з формул $\bar{v}_F(\omega)$. Фур'є-образ контакту в цьому випадку буде $\zeta_F(\omega,h) = S^+(\omega,h) - S^-(\omega,h)$. Разом вони складають так звану систему рівнянь Страхова [102] і завершують доведення теореми[14]. ■

З цієї теореми випливає, що при визначенні контакту $\zeta(x,h)$ за вихідними даними на коротких профілях з (1.37) слід розв'язувати як мінімум два лінійних інтегральних рівняння. У той же час при відшуканні контакту з вихідних даних на довгому інтервалі можна обмежитись розв'язком лише одного лінійного рівняння (1.23_i), проте при заданні значень $\zeta(x,h)$ на *істотно коротких* інтервалах такий розв'язок на сьогодні є неприпустимо грубим.

У даному випадку доведеться, як зауважено вище, за фрагментом функ ції $\zeta(x,h)$ відновити її на довгому інтервалі з допомогою екстраполяції, для чого слід додатково розв'язати ще одне інтегральне рівняння[15]. Внаслідок цього обсяг праці з визначення контакту за вихідними даними на коротких інтервалах як в першому, так і в другому випадках приблизно однаковий.

Природно постає запитання, чи можливо визначити контакт $\zeta(x,h)$ на короткому відрізку, виходячи лише з одного рівняння. Гадаємо, позитивна відповідь в цій ситуації зводиться до використання операторів із швидко спадаючими ядрами. Введемо в розгляд функцію виду (1.27) у такому вигляді

$$w(x) = v(x) - \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(\xi - x; h)v(\xi)d\xi\,,\; K(\xi - x; h) = \frac{1}{4h}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\operatorname{ch}\frac{\pi(t-x)}{2h}\right)^{-1}\frac{1}{h^2 + (t-\xi)^2}dt\,. \quad (1.38)$$

З теореми Нумерова з урахуванням висновків 1.1 в 1.2 логічно випливає

<u>**Висновок**</u> **1.3.** Якщо розв'язок $\zeta(x)$ нелінійного інтегрального рівняння (1.4) належить до класу $Nu^{(1,\alpha)}(1,D)$, то його лінійне наближення $\zeta(x,h)$ визначається з точністю до квадрату відхилення $\zeta(x,h) = \zeta(x) - h$, $h^- \le h \le h^+, x \in R^{(1)}$, як розв'язок лінійного інтегрального рівняння Фредгольма 1-го роду

$$\frac{1}{4h}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\operatorname{ch}\frac{\pi(\xi - x)}{2h}\right)^{-1}\zeta(\xi,h)d\xi = w(x), \quad (1.39)$$

еквівалентного, до речі, рівнянню (1.23_2).

Доведення. Дійсно, шукане наближення знаходять із (1.35) у результаті розв'язання системи рівнянь (1.31). Проте з першого рівняння цієї системи і визначення функції $S^\varphi(\xi,h)$ з

---

[14] Власне, спосіб аналітичного продовження Страхова недосконалий, що зауважено вище.

[15] Міркування з приводу його вигляду наведено наприкінці другого розділу.

урахуванням співвідношення (1. 37), де $\zeta(\omega,h)$ – образ Фур'є функції $\zeta(x), x\in R^{(1)}$, а $\bar{\zeta}(\omega,-h)$ – образ Фур'є "паралельного" контакту[16], розташованого вище осі Ox_1, і означеного як (1.36), маємо

$$v(x)=\frac{1}{4h}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\operatorname{ch}\frac{\pi(\xi-x)}{2h}\right)^{-1}\cdot\zeta(\xi,h)d\xi+\frac{1}{4h}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\operatorname{ch}\frac{\pi(\xi-x)}{2h}\right)^{-1}\cdot\bar{\zeta}(\xi,-h)d\xi .$$

Звідси з урахуванням (1.36) й означення (1.38) переконуємось, що

$$\frac{1}{4h}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\operatorname{ch}\frac{\pi(t-x)}{2h}\right)^{-1}dt\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(t-\xi)^2}\cdot v(\xi)d\xi=$$

$$=\frac{1}{4h}\int_{-\infty}^{\infty}v(\xi)d\xi\int_{-\infty}^{\infty}\left(\operatorname{ch}\frac{\pi(t-x)}{2h}\right)^{-1}\cdot\frac{1}{h^2+(t-\xi)^2}dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}K(\xi-x;h)\cdot v(\xi)d\xi ,$$

що й треба було довести. ■

Цей наслідок довів *можливість визначення наближень контакту* $\zeta(x,h)$ *на короткому інтервалі задання* $w(x)$ *з єдиного рівняння* (1.39). Одначе функцію $w(x)$, визначену з (1.38) за наявними даними потрібно знайти досить точно. Вказаний спосіб визначення лінійного наближення $\zeta(x,h)$, окрім розв'язку системи (1.31) – не єдино можливий. Можна, наприклад, із першого рівняння цієї системи визначити допоміжну функцію $S^+(x,h)$ перетворення Фур'є, а згодом, згадуючи її означення і посилаючись на (1.36), обчислити наближення з формули [92, с. 127]:

$$\zeta(x,h)=2S^+(x,h)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}\cdot v(\xi)d\xi \qquad (1.40)$$

Там же на практичних прикладах переконливо доведено, що кожен із пропонованих способів відшукання наближення $\zeta(x,h)$ нерівнозначний один одному за однакових умов задання правої частини $v(x)$. *Найкращі за точністю результати розрахунків на коротких відрізках, очевидно, очікуються з вирішення системи* (1.31), оскільки не лише ядро Пуассона, яке фігурує в (1.40), але й його комбінація з ядром Шварца в (1.38) для обчислення (1.39) спадає з ростом $|\xi-x|$ значно повільніше, ніж просто ядро Шварца в системі (1.31).

Залишається дати правило визначення і тлумачення функції $w(x)$. Оскільки має місце співвідношення [87, с. 31] (див. також (1.28))

$$\frac{1}{4h}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\operatorname{ch}\frac{\pi(t-x)}{2h}\right)^{-1}\cdot\frac{h}{h^2+(t-\xi)^2}dt=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2kh}{(2kh)^2+(\xi-x)^2},$$

то, домноживши його зліва й справа на множник $-\frac{1}{\pi}v(\xi)$ й інтегруючи по ξ в нескінченних межах з урахуванням визначення (1.35), отримуємо

$$w(x)=v(x)+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2kh}{(\xi-x)^2+(2kh)^2}v(\xi)d\xi \qquad (1.41)$$

---

16 А також на основі результатів Страхова [102] і виразу (1.23), або виразу (15) з роботи [131] при $h = 0$.

***Зауваження* 1.11**. В термінах теорії поділу потенціальних полів [77] функцію $w(x)$ з (1.41) слід розуміти як складову сумарного поля, зумовленого “паралельними” контактами, зв’язану з контактом співвідношенням (1.39).

При чисельній реалізації формул виду (1.31)

$$u(x,0)=\frac{1}{2h}\int_{-\infty}^{\infty}S^{+}(\xi,h)\cdot\left(\operatorname{ch}\frac{\pi(\xi-x)}{2h}\right)^{-1}d\xi,\quad v(x)=\frac{1}{2h}\int_{-\infty}^{\infty}S^{-\psi}(\xi,h)\cdot\operatorname{th}\frac{\pi(\xi-x)}{2h}d\xi$$

слід врахувати, що $u(x)$ задано на скінченному відрізку $[-l,l]$, $l<\infty$, а гіперболічні функції $\operatorname{ch}\frac{\pi x}{2h}$ й $\operatorname{th}\frac{\pi x}{2h}$ можливо обчислити лише на відрізку $[-a,a]$, де, як правило, $a\le l$. При цьому $a=2h\alpha_0/\pi$, а число α_0 для конкретного ПК невелике (для i486 $\alpha_0=308$). Через це можна визначити лише наближення

$$\tilde{v}(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{l}(\tilde{u}_\delta(\omega,0)\cos\omega x-\tilde{u}_c(\omega,0)\sin\omega x)d\omega,$$

де $\tilde{u}_c(\omega,0)=\int_{-l}^{l}u(x)\cos\omega x dx, \tilde{u}_s(\omega,0)=\int_{-l}^{l}u(x)\sin\omega x dx$, а подати $\tilde{v}(x)$ через функції $S^{+}(\xi,h)$ і $S^{-}(\xi,h)$ можна лише у вигляді

$$\tilde{u}(x,0)=\frac{1}{2h}\int_{-a}^{a}S^{+}(\xi,h)\left(\operatorname{ch}\frac{\pi(\xi\text{ - x})}{2\text{h}}\right)^{-1}d\xi,\quad \tilde{v}(x)=\frac{1}{2h}\int_{-a}^{a}S^{-}(\xi,h)\operatorname{th}\frac{\pi(\xi-x)}{2h}d\xi.$$

Цю особливість ми врахуємо при чисельній апроксимації розв’язків.

***Зауваження* 1.12.** Досі ми оперували з наближенням, яке визначається із (1.23_2) з участю параметра h, незалежного від x і кожне з отриманих рівнянь (1.35)-(1.36) чи (1.38)-(1.40) залежить від параметра h. Виходячи з подання (1.23_1), у якому значення $\zeta(x)$ беруть в фіксованій точці, логічно допустити існування для нього аналогів вищевказаних рівнянь. Їх вивчення важливе тим, що розв’язок лінійного рівняння (1.23_1), очевидно, позбавлений залежності від параметра h.

Практичну значущість цього зауваження бачимо в тім, що *значення глибини контакту у кожній фіксованій точці можна отримати в ході ітераційного покращення моделі*, у той час як значення h в “залежних” методах отримують з інших, часто ненадійних джерел.

Зважаючи на подібність властивостей рівнянь ($1.23_{1,2}$) при реалізації останнього зауваження застосуймо вже апробовану схему міркувань; у цьому плані аналогом теореми 1.1 є така теорема.

Теорема 1.2. *Якщо розв’язок* $\zeta(x)$ *нелінійного інтегрального рівняння* (1.4) *для контактної поверхні належить класу* $Nu^{(1,\alpha)}(1,D)$, *то функція* $\zeta^{-}(x)=$ $=S^{+}(x)+S^{-}(x)$, *яка визначається як сума розв’язків лінійних інтегральних рівнянь 1-го роду*

$$\frac{1}{2\zeta(x)}\int_{-\infty}^{\infty}S^{+}(\xi)\left(\operatorname{ch}\frac{\pi(\xi-x)}{2\zeta(x)}\right)^{-1}d\xi=u(x),\quad \frac{1}{2\zeta(x)}\int_{-\infty}^{\infty}S^{-}(\xi)\operatorname{th}\frac{\pi(\xi-x)}{2\zeta(x)}d\xi=v(x),\quad (1.42)$$

відрізняється від розв'язку $\zeta(x)$ *не більше, ніж на квадрат відхилення* $\zeta(\xi,x)=\zeta(\xi)-\zeta(x), \xi, x\in R^{(1)}$.

Доведення: Хід доведення цієї теореми аналогічний доказу теореми 1.1, зауважмо відмінності. Для отримання системи (1.42) введемо допоміжну функцію

$$\zeta^{+}(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\zeta(x)}{\zeta^{2}(x)+(\xi-x)^{2}}v(\xi)d\xi\,, \qquad (1.43)$$

яка є, як і у виразі (1.36), *фіктивним контактом*, розташованим над "профілем спостережень" $y=0$. Інша відмінність стосується аналогів формули (1.37). При їх отриманні врахуймо, що значення $\zeta(x)$ у кожному з виразів (1.23_1) і (1.43) фактично грає роль параметра, незалежного від x, а як представник класу $Nu_2^{(1,\alpha)}(1,D)$, є *неперервною функцією* свого аргументу. У цій ситуації під перетворенням Фур'є кожного з рівнянь (1.23_1) і (1.43) розумітимемо такі операції, задля певності продемонстровані на прикладі відношення (1.23_1):

$$v_F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}v(x)\cdot e^{-i\omega x}dx=\frac{1}{\pi}\lim_{y\to x}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega x}dx\int_{-\infty}\frac{\zeta(y)}{\zeta^{2}(y)+(\xi-x)^{2}}\cdot\zeta(\xi)d\xi=$$

$$\frac{\zeta(x)}{\pi}\lim_{y\to x}\int_{-\infty}^{\infty}\zeta^{-}(\xi)d\xi\int_{0}^{\infty}\frac{2\cos\omega u}{\zeta^{2}(y)+u^{2}}=\zeta_F^{-}(\omega)e^{-\omega\zeta(x)}, \omega\geq 0\,,$$

тобто визначені у смислі *узагальнених функцій*. Виконуючи такі ж операції над виразом (1.43), отримуєм аналог співвідношень (1.37) у вигляді

$$\zeta_F^{-}(\omega)=v_F(\omega)\cdot e^{\omega\zeta(x)},\ \zeta_F^{+}(\omega)=v_F(\omega)\cdot e^{-\omega\zeta(x)}, \omega\geq 0\,.$$

Після цього визначаємо функції

$$S^{\varphi}(\omega)=\frac{1}{2}\left[\zeta_F^{-}(\omega)+\zeta_F^{+}(\omega)\right],\ S^{\psi}(\omega)=\frac{1}{2}\left[\zeta_F^{-}(\omega)-\zeta_F^{+}(\omega)\right],$$

які дозволяють отримати формули

$$\zeta_F^{-}(\omega)=S^{\varphi}(\omega)+S^{\psi}(\omega),\ v_F(\omega)=S^{\varphi}(\omega)\cdot(\mathrm{ch}\omega\zeta(x))^{-1},\ \bar{v}_F(\omega)=S^{\psi}(\omega)\cdot(\mathrm{sh}|\omega|\zeta(x))^{-1},$$

обернені перетворення від яких дозволяють впевнитись у справедливості теореми. При цьому обернене перетворення Фур'є виконуєм за схемою

$$v(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}v_F(\omega)\cdot e^{i\omega x}d\omega=\frac{1}{2\pi}\lim_{y\to x}\int_{-\infty}^{\infty}(\mathrm{ch}\omega\zeta(y))^{-1}\cdot e^{i\omega x}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}S^{+}(\xi)\cdot e^{-i\omega\xi}d\xi=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\lim_{y\to x}\int_{-\infty}^{\infty}S^{+}(\xi)d\xi\int_{-\infty}^{\infty}(\mathrm{ch}\omega\zeta(y))^{-1}\cdot e^{-i\omega(\xi-x)}d\omega=\frac{1}{2\zeta(x)}\int_{-\infty}^{\infty}S^{+}(\xi)\cdot\left(\mathrm{ch}\,\frac{\pi(\xi-x)}{2\zeta(x)}\right)^{-1}d\xi\,,$$

і аналогічно – для другої із формул. ■

Висновок 1.4. Якщо розв'язок $\zeta(x)$ *нелінійного* інтегрального рівняння для контактної поверхні належить множині $Nu^{(1,\alpha)}(1,D)$, то його лінійне наближення $\zeta^{-}(x)$ визначається з точністю до квадрату відхилення $\zeta(\xi,x)=\zeta(\xi)-\zeta(x)$ як розв'язок лінійного рівняння 1-го роду

$$\frac{1}{4\zeta(x)}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\operatorname{ch}\frac{\pi(\xi-x)}{2\zeta(x)}\right)^{-1}\cdot\zeta^{-}(\xi)d\xi=w(x),\ w(x)=v(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}K(\xi-x;\zeta(x))\cdot v(\xi)d\xi, \quad (1.44_1)$$

де
$$K(\xi-x;\zeta(x))=\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\operatorname{ch}\frac{\pi(t-x)}{2\zeta(x)}\right)^{-1}\cdot\frac{dt}{\zeta^2(x)+(t-\xi)^2}. \quad (1.44_2)$$

Існує й аналог формули (1.40) у вигляді

$$\zeta^{-}(x)=2S^{+}(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\zeta(x)}{\zeta^2(x)+(\xi-x)^2}v(\xi)d\xi. \quad (1.45)$$

***Зауваження* 1.13.** У формулах (1.42)-(1.45) замість параметра h обрано значення невідомого розв’язку $\zeta(x)$ нелінійного рівняння для контакту. Ясна річ, будь-яке з цих рівнянь практично реалізовне лише методами ітерацій.

***Зауваження* 1.14.** Якщо замість $u(x)$ відомі значення “горизонтальної” $H_a(x,0)$ і “вертикальної” $Z_a(x,0)$ похідних напруженості магнітного потенціалу, то, позначаючи півсуму й піврізницю функцій $u(x,h)$ й $u(x,-h)$ через $S^{+}(x,h)$ і $S^{-}(x,h)$, цілком можна записати [92, с. 128] для їх визначення систему спряжених лінійних інтегральних рівнянь 1-го роду

$$\frac{1}{2h}\int_{-\infty}^{\infty}S^{+}(\xi,h)\left(\operatorname{ch}\frac{\pi(\xi-x)}{2h}\right)^{-1}=Z_a(x,0),\ \frac{1}{2h}\int_{-\infty}^{\infty}S^{-}(\xi,h)\operatorname{th}\frac{\pi(\xi-x)}{2h}=H_a(x,0)$$

Знаючи розв’язки цієї системи, значення аналітично продовженої на рівень $x_2=-h$ чи $x_2=h$ функції $u(x,y)$ (контакту) знайдем із (1.28).

***Зауваження* 1.15.** Для магнітоактивного контакту справедливе твердження на зразок висновку 1.4, при лінеаризації відповідного рівняння до вигляду

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\chi(x)}{(\xi-x)^2+\chi^2(\xi)}\cdot\chi(\xi)d\xi+F_0(\chi,\xi)=Z_a(x,0),\ Z_a(x,0)=T(x)-\chi(x), x\in R^{(1)},$$

де $F_0(\chi,\xi)=\frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\chi,\xi)d\xi$ – доданок, що відповідає за косе намагнічення порід.

Будь-яка математична модель через певну обмеженість наближень не в змозі врахувати всіх факторів досліджуваного середовища; мистецтво інтерпретації полягає у вдалому врахуванні цих обмежень за адекватними критеріями. Перед окресленням обмежень моделі і пошуком розв’язків рівнянь (1.21_2) та (1.31)[17], які мінімально ухиляються від заданих в певній метриці наведімо деякі міркування щодо основних властивостей їх лінійних операторів на деяких нормованих просторах; вибір норми визначається постановкою задачі.

1.3. Властивості інтегральних операторів контактної задачі

Підбиваючи підсумки модельних описань контактної задачі, очевидно, можна звести лінійні інтегральні рівняння (1.23_2) і (1.31)[18] з гармонічною правою частиною

---

[17] Маємо на увазі, що вони повністю поширюються й на оператори узагальнених рівнянь (1.23_1) та (1.44).

[18] Розглядаємо надалі узагальнені рівняння, оскільки для рівнянь з параметром *h* міркування цілком аналогічні.

$v(x,\zeta)=u(x)-\zeta(x)$ та ядрами Пуассона і Шварца

$$K_1(x,\zeta)=\frac{1}{\pi}\frac{\zeta(x)}{(\xi-x)^2+\zeta^2(x)},\ K_2(x,\zeta)=\frac{1}{2\pi}\left(\operatorname{ch}\frac{\pi(\xi-x)}{2\zeta(x)}\right)^{-1},$$

до компактного вигляду інтегрального рівняння Фредгольма 1-го роду

$$\int_{-\infty}^{\infty}K_s(x,\zeta_i)\zeta(\xi)d\xi=v_i(x,\zeta_i),\ x\in D,\ s=1,2,\ \xi\in R^{(1)} \tag{1.46}$$

для визначення наближень контакту $\zeta_n(\xi), n=0,1,2,...$ Його розв'язок є очевидним результатом ітераційного процесу

$$\int_{-l}^{l}K_s(x,\zeta_i)\zeta_n(\xi)d\xi=v(x,\zeta_i),\ l<\infty,\ n=\overline{0,\infty},\ \zeta_0(\xi)=u(\xi)-\zeta(\xi),\ \xi\in R^{(1)} \tag{1.47}$$

Надалі називатимем це відношення *інтегральним рівнянням для контактної поверхні* за полем, заданим на *майже нескінченному* інтервалі. Шуканий контакт визначається з послідовності $\{\zeta_n(x)\}$ при $n>0$, а контактна задача остаточно формулюється таким чином: знайти однозначну функцію $\zeta=\zeta(x), x\in R^{(1)}$ як границю послідовності $\{\zeta_n(x)\}$, генерованої процесом (1.47), що визначає положення контактної границі двох однорідних середовищ ∂D_1 і ∂D_2 за значеннями вертикальної похідної логарифмічного потенціалу заданого поза областю D на нескінченній прямій ∂D_1: $x_2=0$ при заданій постійній густині σ розподілу мас в області D.

Аналогічне формулювання справедливе й для умов задання поля на істотно обмеженому інтервалі; відрізняється лише вигляд інтегрального ядра.

***Зауваження* 1.16.** При наближеному обчисленні рівняння (1.46) за однією з кубатурних формул [16] без урахування залишкових членів сингулярність ядра $K_s(x,\zeta_i)$ при $x=\xi$ врахуємо, перетворивши його за методом Л. Канторовича [45] і отримавши систему лінійних алгебраїчних рівнянь щодо шуканого контакту $\zeta(\xi_j), i=\overline{1,n}$

$$\zeta(x_i)\left[1+\sum_{j=1}^{n}c_j\,K_s(x_i,\xi_j)\right]+\sum_{j=1}^{n}c_j\,K_s(x_i,\xi_j)[\zeta(\xi_j)-\zeta(x_i)]=v(x_i,\zeta),\ s=1,2. \tag{1.48}$$

Неперервність підінтегральної функції дозволяє замінити інтеграл скінченною сумою. Точність δ заміни інтегральних квадратур оцінюють за допомогою мажорантних виразів для її залишкового члена $R_n(x_i,n,\zeta)$ [16]. Матриця системи (1.48) за великих n погано обумовлена через похибки правої частини і визначення коефіцієнтів c_j квадратур і потребує спеціальних методів вирішення [143-147].

Похибки спостережень (вхідних даних контактної задачі) найчастіше задають в мірах просторів неперервних функцій $C(D)$, абсолютно інтегровних функцій $L^{(1)}(D)$, та дійсного гільбертового простору $L^{(2)}(D)$, тому доцільно визначати норми нев'язок і властивості розв'язку саме в цих просторах. Оптимізація в метриці C означає пошук найтісніше корельованого з початковою моделлю розв'язку, а в метриці L_2 – середньоквадратичне

наближення[19].

Властивості інтегральних операторів вивчатимем на прикладі операторів лінійних рівнянь (1.23_2) і (1.31); цей вибір зумовлено простотою їх досліджень.

1.3.1. Властивості лінійних операторів. Основні властивості лінійного інтегрального оператора (1.23_2) прямої відповідності $v = A^P(\zeta)$ в класі $Nu^{(1,\alpha)}(1,D)$ між фізичними параметрами середовища і визваним ними полем, заданого рівнянням

$$v(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x,\xi)\zeta(\xi)d\xi = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h}{(\xi - x)^2 + h^2}\zeta(\xi)d\xi\,,\ h > 0,$$

з неперервним формально симетричним щодо змінних $-\infty < x,\ \xi < \infty$ ядром $K(x,\xi) = K(\xi,x)$, $h > 0$ в просторах $C(R^{(1)})$ і $L^{(m)}(R^{(1)}), m = 1,2$ описано в [140]. Нагадаємо коротко суть. Структуру оператора характеризує така теорема:

Теорема 1.3. *Якщо функція контакту* $\zeta(x) \in Nu^{(1,\alpha)}(1,D)$, *то лінійний інтегральний оператор* $v = A^P(\zeta)$ *задачі* (1.15) *є обмеженим, неперервним і компактним в просторах* $C(R^{(1)})$ *й* $L^{(m)}(R^{(1)}), m = 1,2$.

Доведення. Рівномірна *обмеженість* і *неперервність* випливає з лінійності та ланцюжка очевидних співвідношень

$$\left\|A^P(\zeta)\right\|_C = \max_x \left|\int_{-\infty}^{\infty} K^P(x,\xi)\zeta(\xi)d\xi\right| \le \max_\xi |\zeta(\xi)| \max_x \left|\int_0^{2\pi} K^P(x,\xi)d\xi\right| = \|\zeta\|_C,$$

$$\left\|A^P(\zeta)\right\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty} K^P(x,\xi)\zeta(\xi)d\xi\right| \le \int_{-\infty}^{\infty}|\zeta(\xi)|d\xi \int_{-\infty}^{\infty}\left|K^P(x,\xi)\right|dx = \|\zeta\|_{L_1},$$

$$\left\|A^P(\zeta)\right\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty} K^P(x,\xi)\zeta(\xi)d\xi\right|^2 dx \le \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\left[K^P(x,\xi)\right]^2 d\xi \int_{-\infty}^{\infty}\zeta^2(\xi)d\xi\right]dx = 4e^{-2\omega h}\cdot\|\zeta\|_{L_2}^2,$$

як наслідок канонічного розкладу $\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2 + (\xi - x)^2}d\xi = 1$, оскільки має місце:

$$\frac{1}{\pi}\frac{h}{h^2 + (\xi - x)^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\omega| h}\cos\omega(\xi - x)d\omega\,,\ \delta(\xi - x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\cos\omega(\xi - x)d\omega\,.$$

Компактність випливає з одностайної неперервності й рівномірної обмеженості функцій $v(x)$ на обмеженій множині $E = \{\zeta(x) : \zeta \in C(R^{(1)}), \|\zeta\|_C \le c\}$, яку за умови $|\Delta x| < \delta > 0$ ілюструє нерівність

$$|v(x + \Delta x) - v(x)| \le c\int_{-\infty}^{\infty}\left|K^P(x + \Delta x,\xi) - K^P(x,\xi)\right|d\xi \le \frac{2h|\Delta x|}{(h - \Delta x)^2}c\,.$$

Оператор $v = A^P(\zeta)$ *цілком неперервний* і при відображенні $L^{(m)}(R^{(1)})$ в $L^{(m)}(R^{(1)})$, що є

---

[19] Останню метрику варто застосовувати лише за відсутності систематичних похибок у вхідних даних. Знайдений у ній розв`язок є доповненням початкової моделі деякою гармонічною функцією, яка швидко спадає з глибиною, тому верхня межа контакту варіюється щодо нульового наближення більше, ніж нижня.

наслідком *неперервності* та *рівномірної збіжності* за Стєкловим функцій $\zeta(x)$ на обмеженій множині E та теореми Колмогорова. Внаслідок формальної симетрії ядра оператор (1.23_2) у просторі $L^{(2)}(R^{(1)})$ самоспряжений. Дійсно, ввівши лінійний функціонал

$$f(v)=\int_{-\infty}^{\infty}\tau(t)v(t)dt,\quad v\in L^{(p)},\ \tau\in L^{(q)},\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

на множині $V(A^P)$ витокоподібно зображуваних функцій $v(t)=\int_{-\infty}^{\infty}K(x,\xi)\zeta(\xi)d\xi$ в просторі $L^{(m)}(R^{(1)})$, через відношення

$$f(A^P\zeta)=\int_{-\infty}^{\infty}\tau(t)\left[\int_{-\infty}^{\infty}K^P(x,\xi)\zeta(\xi)d\xi\right]dt=\int_{-\infty}^{\infty}\zeta(\xi)\left[\int_{-\infty}^{\infty}K^P(x,\xi)\tau(t)dt\right]d\xi=\int_{-\infty}^{\infty}\zeta(\xi)v(\xi)d\xi$$

з урахуванням симетрії ядра приходим до висновку, що лінійному інтегральному оператору $A^P:L^{(p)}\to L^{(q)}$ відповідає спряжений $A^{P^*}:L^{(q)}\to L^{(p)}$, теж *обмежений, неперервний* і *компактний*. При $p=q=2$ оператори A^P й A^{P^*} діють в єдиному просторі $L^{(2)}(R^{(1)})$; через симетрію ядра вони співпадають, $A^P=A^{P^*}$, що й означає самоспряженість оператора Пуассона в $L^{(2)}(R^{(1)})$. ■

Властивості лінійного прямого оператора (1.31) $u=A^S(\zeta)$ в класі $Nu^{(1,\alpha)}(1,D)$, заданого рівнянням

$$u(x)=\int_{-\infty}^{\infty}K^S(x,\xi)\zeta(\xi)d\xi=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\operatorname{ch}\frac{\pi(\xi-x)}{2h}\right)^{-1}\zeta(\xi)d\xi\,,\ h>0,$$

з неперервним формально симетричним по $-\infty<x,\xi<\infty$ ядром $K(x,\xi)=K(\xi,x)$ $h>0$ у просторах $C(R^{(1)})$ й $L^{(m)}(R^{(1)}), m=1,2$ описуються вперше. Структуру цього оператора характеризує наступна теорема:

Теорема 1.4. *Якщо функція контакту* $\zeta(x)\in Nu^{(1,\alpha)}(1,D)$*, то лінійний інтегральний оператор* $u=A^S(\zeta)$ *задачі* (1.31) *є обмеженим, неперервним і компактним у просторах* $C(R^{(1)})$ *й* $L^{(m)}(R^{(1)}), m=1,2$.

Доведення. В силу лінійності оператора $u=A^S(\zeta)$ його рівномірну *обмеженість* і *неперервність* ілюструє ланцюжок наступних співвідношень

$$\left\|A^S(\zeta)\right\|_C=\max_x\left|\int_{-\infty}^{\infty}K^S(x,\xi)\zeta(\xi)d\xi\right|\le\max_\xi|\zeta(\xi)|\max_x\left|\int_0^{\infty}K^S(x,\xi)d\xi\right|=\pi h\|\zeta\|_C\,,$$

оскільки $\int_0^{\infty}\frac{dx}{\operatorname{ch}ax}=\int_0^{\infty}\frac{2dx}{e^{ax}+a^{-ax}}=\operatorname{arctg}(\operatorname{sh}ax)\Big|_0^{\infty}=2\operatorname{arctg}e^{ax}\Big|_0^{\infty}=\frac{\pi}{2a}$ (див. [29, с. 204]) та

$$\left\|A^S(\zeta)\right\|_{L_2}^2=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty}K^S(x,\xi)\zeta(\xi)d\xi\right|^2dx\le\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\left[K^S(x,\xi)\right]^2d\xi\int_{-\infty}^{\infty}\zeta^2(\xi)d\xi\right]dx=6e^{-\omega h}\,N\|\zeta\|_{L_2}^2\,,$$

де $N=\left|\pi h+\ln\left(\operatorname{ch}\frac{\pi x}{2h}\right)+\operatorname{arctg}e^{-\omega h}\right|+C$. У той же час цей оператор демонструє необмеженість на просторі $L_1(R^{(1)})$ через розбіжність внутрішнього інтеграла

$$\left\| A^S(\zeta) \right\|_{L_1} = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} K^S(x,\xi)\zeta(\xi)d\xi \right| \le \int_{-\infty}^{\infty} |\zeta(\xi)|d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \left| K^S(x,\xi) \right| dx = \infty .$$

Ця особливість потребує додаткових досліджень; гадаємо, інтеграл можна регуляризувати в смислі узагальнених функцій. Щодо *компактності* оператора $u = A^S(\zeta)$, то її за умови $|\Delta x| < \delta > 0$ достатньо ілюструє вираз

$$|u(x+\Delta x) - u(x)| \le c \int_{-\infty}^{\infty} \left| K^S(x+\Delta x,\xi) - K^S(x,\xi) \right| d\xi \le 2 \frac{\operatorname{arctg} e^{\frac{\pi(\xi - x)}{2h^+}}}{\operatorname{arctg} e^{\frac{\pi(\xi - \mathrm{x})}{2\mathrm{h}^-}}} c .$$

Очевидно, що лінійному інтегральному оператору $A^S : L^{(p)} \to L^{(q)}$ відповідає спряжений $A^{S^*} : L^{(q)} \to L^{(p)}$, теж обмежений, неперервний і компактний. При $p = q = 2$ оператори A^S і A^{S^*} діють у єдиному просторі $L^{(2)}\left(R^{(1)}\right)$; через симетрію ядра $A^S = A^{S^*}$, відтак оператор Шварца самоспряжений в $L^{(2)}\left(R^{(1)}\right)$. ■

Аналіз властивостей лінійних операторів (1.23_2) і (1.31)[20] у підсумку доводить нестійкість відповідних обернених задач, тому для їх коректного розв'язання потрібно застосовувати спеціальні регулярні методи, які на компактних класах типу $Nu^{(1,\alpha)}(1, D)$ надають стійкості шуканим розв'язкам.

При вивченні питань розв'язуваності задачі (1.46) істотну роль відіграє структура просторів вхідних даних та можливих розв'язків, що тісно пов'язана із властивостями лінійних операторів рівнянь (1.23_2) і (1.31). Для оператора $A^P(\zeta)$ рівняння (1.23_2) її описано в праці [140, с. 45-50], а для оператора $A^S(\zeta)$ рівняння (1.31) вона вивчається вперше. Коротко висвітлимо суть досягнень.

1.3.2. Структура лінійних розв'язків. Згідно описаних характеристик операторів $A^P : L^{(p)} \to L^{(q)}$ і A^{*P} області їх визначення можна подати у вигляді такого ортогонального розщеплення

$$D\left(A^P\right) = N\left(A^P\right) \oplus V\left(A^{*P}\right), D\left(A^{*P}\right) = N\left(A^{*P}\right) \oplus V\left(A^P\right)$$

чи еквівалентного $L^{(2)}\left(R^{(1)}\right) = H_0\left(R^{(1)}\right) \oplus H_1\left(R^{(1)}\right)$ із ненульовими елементами, де $H_0 = V\left(A^{*P}\right) = V\left(A^P\right)$ і $H_1 = V\left(A^{*P}\right) = V\left(A^P\right)$; це розщеплення доводить відсутність ефективного критерію належності правої частини $v(x) \in L^{(2)}$ рівняння $A^P(\zeta) = v$ області значень $V\left(A^P\right)$ – ортогональність $v(x) \perp N\left(A^{*P}\right)$ визначає нескінченну множину відношень, а єдиний розв'язок задачі можна знайти на певній обмеженій підмножині множини можливих розв'язків $V\left(A^{*P}\right)$. Через неможливість скористатись властивістю $\zeta(\xi) \perp N\left(A^P\right)$ вкажемо додатковий критерій належності $\zeta(\xi) \in V\left(A^{*P}\right)$, яким є *рівномірна* в середньому *обмеженість* підмножин множини

---

[20] Ми опускаємо вивчення властивостей оператора з th-ядром, неявно постулюючи їх подібність до властивостей першого оператора із ch-ядром, різниця буде лише у величині відповідних норм. В майбутньому буде проведено їх строге дослідження.

$V\left(A^{*P}\right)$ і *одностайна* в середньому їх *неперервність*. Останню ознаку при малому значенні $\left|\Delta x\right| < \varepsilon$ варто замінити еквівалентною ознакою *рівномірної обмеженості* перших похідних $\zeta(\xi)$, згідно відношення [140, с. 50]

$$\zeta(x+\Delta x)-\zeta(x)=-\frac{\Delta x}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{2h\cdot(x-\xi)}{\left[(x-\xi)^2+h^2\right]^2}\cdot v(\xi)d\xi+o\left(\left|\Delta x\right|^2\right)=\Delta x\cdot\frac{\partial\zeta(x)}{\partial x}+o\left(\leq\left|\Delta x\right|^2\right),$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\partial\zeta(x)}{\partial x}\right]^2 dx=\frac{\|v\|^2}{\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}dx\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{2h(x-\xi)}{\left[(x-\xi)^2+h^2\right]^2}\right)^2 d\xi=\ldots=4\omega^2 e^{-2\omega h}\cdot\|v\|_2^2,\ \omega\geq 0,\ h>0.$$

Рівномірна обмеженість функцій $\zeta(\xi)$ випливає з оцінки $\|\zeta\|_2\leq 2e^{-\omega h}\cdot\|v\|_2, \omega\geq 0$, отриманої при доведенні неперервності оператора A^P, тому область визначення нормальних розв'язків задачі (1.23_2) описується множиною [140, с. 51]

$$V_0=\left\{\zeta(x):\zeta^{(n)}\in L^{(2)}\left(R^{(1)}\right);\ \ \left\|\zeta^{(n)}\right\|_2\leq c^{(n)},\quad n=0,1\right\},\ c^{(0)}=2e^{-\omega h}\ ,\ c^{(1)}=2\omega\cdot e^{-\omega h},\ \omega\geq 0 \quad (1.49)$$

Оператор A^P є *компактним*, тому обернений до нього є розривним, а область його визначення незамкнута по нормі $L^{(2)}$ через наявність нуль-многовидів $N\left(A^P\right)$ й $N\left(A^{*P}\right)$, тобто обернене відображення нестійке. Остаточно переконують нас у цьому чисельні оцінки варіацій будови середовища й поля.

Структуру множини можливих розв'язків лінійного оператора $A^S: L^{(p)}\to L^{(q)}$ рівняння (1.31) теж визначає вищезгадане ортогональне розщеплення, тому з тих же міркувань для області визначення нормальних розв'язків оператора $A^S(\zeta)=u$ виведено множину виду:

$$V_0=\left\{\zeta(x):\zeta^{(n)}\in L^{(2)}\left(R^{(1)}\right);\ \ \left\|\zeta^{(n)}\right\|_2\leq c^{(n)},\quad n=0,1\right\},\ c^{(0)}=N\,e^{-\omega h},\ c^{(1)}=\frac{\pi N h^+}{2c^{(0)}}e^{-\omega h} \quad (1.50)$$

де $N=\left|\pi h+\ln\left(\operatorname{ch}\frac{\pi x}{2h}\right)+\operatorname{arctg}e^{-\omega h}\right|+C$ – константа, вже отримана нами при доведенні обмеженості цього оператора, $\omega\geq 0$.

Міркування, проведені для рівнянь (1.23_2) і (1.31), зберігають свою силу також для їх узагальнених аналогів (1.23_2) і (1.42) та для альтернативних рівнянь типу (1.39). Так оператор прямої задачі $A(x,\zeta)$ для рівняння (1.39) на множині $Nu^{(1,\alpha)}(1,D)$ є обмеженим, неперервним і компактним в метриці $C\left(R^{(1)}\right)$, що очевидно з міркувань, подібних до проведених для оператора (1.23_2).

Завершуючи огляд множин розв'язків основних рівнянь поставленої лінійної контактної задачі, наведемо міркування щодо єдиності і стійкості розв'язків на компакті. Численні дослідження [25, 59, 62, 69, 73, 128, 147, 160] виявили необхідність доводити власну теорему єдиності для кожного модельного класу. Цю складну проблема вирішують лише за певних спрощень щодо задання поля (його задають всюди на деякій площині чи на границі регулярної області, нех-тують дискретністю і похибками його задання) чи будови середовища (постійна чи фіксована густина, однозв'язність і гладкість аномальної області), тощо. Будь-яке

узагальнення модельних класів призводить до зростання розмірності і, як наслідок, нестійкості задачі; у той же час подібні жорсткі вимоги до розв'язку якщо і мають геологічний смисл, їх буває важко задовольнити – слід провадити складну попередню обробку. Власне, неоднозначність розв'язку оберненої задачі логарифмічного потенціалу за відсутності обмежень на форму носія мас і характер їх розподілу є безпосереднім наслідком відомої леми П. С. Новікова [62], тому будь-яка теорема єдиності містить певні обмеження, які дозволяють уникнути еквівалентності при визначенні контакту[21]; у нашому випадку цього досягають параметризацією області D – звуженням областей з класу Страхова до областей з класу Нумерова $Nu_2^{(1,\alpha)}(1,D)$, які допускають однозначне визначення контакту при заданій густині.

При доведенні теореми єдиності для класу $Nu^{(1,\alpha)}(1,D)$ ніяких жорстких при пущень, як переконаємось, робити не треба. Для відновлення коректності контактної задачі (1.46) у постановках (1.23_i) і (1.31) слід довизначити її. Згідно топологічної концепції неперервних відображень, стійкість обернених задач потенціалу є наслідком єдиності їх розв'язку, якщо клас їх єдиності – компакт. Процедура довизначення задачі пов'язана із визначенням *множини коректності*, на якій існує єдиний розв'язок рівняння. Означення цієї множини в теоремі єдиності знімає питання розв'язуваності некоректних задач, тому що на ній умовно коректні задачі мають стійкі розв'язки. Визначивши множину коректності для кожного з лінійних операторів A^P і A^S, доведемо і їх стійкість на множині можливих розв'язків рівняння (1.46).

1.3.3. Про некоректність розв'язків. Нестійкість обернених задач потенціала зумовлена відсутністю неперервної залежності від вхідних даних через скінченність і наближеність інформації про аномальне поле, а їх неоднозначність – наявністю широкого спектру мас нульового потенціалу [89, 95, 107]. Таку ж природу має й доведена нами умовна коректність задачі (1.46). Звичайні чисельні методи для її розв'язання непридатні, натомість застосовують регулярні [41,47, 51, 122]. Їх суть полягає у довизначенні вихідної задачі на основі додаткової апріорної інформації про її розв'язок з метою заміни деякою коректною задачею, яка на оконтуреній певним чином множині коректності містить єдиний нормальний розв'язок (іншими словами, на образі якої обернений оператор неперервний). Знайшовши умови однозначного обернення рівняння (1.46) достатньо збудувати послідовність неперервних операторів, яка, з одного боку, апроксимує необмежений обернений оператор[22], а з іншого, збігається на певному елементі (образі з області існування) до точного розв'язку. Із цієї множини можливих розв'язків за наявності перешкод у вхідних

21 Еквівалентність в класі контактних поверхонь – майже співпадіння кількох границь за умови грубої апроксимації густини збурюючих мас і виміряного з похибками поля.

22 Він дає точний розв`язок задачі при абсолютно точних вхідних даних.

даних обирають за певним критерієм такий наближений розв’язок, точність якого співставна з точністю вхідних даних, а сам розв’язок прагне до точного при устремлінні міри похибок до нуля.

Через асимптотично-оптимальний характер регуляризації практичним наближенням не можна приписати властивості регуляризуючих алгоритмів, можна говорити лише про розв’язок з певною точністю. Основне протиріччя теорії регуляризації – характеризацію множини $\aleph$ апріорі рівноправних *допустимих розв’язків* лише одним елементом – оптимальною моделлю долають за допомогою комбінованих алгоритмів, які поєднують оптимальні оцінки з аналізом змістовних рис, властивих будь-якому допустимому розв’язку [14]. Оптимальні оцінки параметрів підбору відіграють роль опорного розв’язку, що знижує затрати на обчислення границь ε-еквівалентності. Практична апробація алгоритму [14] засвідчує відсутність у гравіполі інформації, яка б дозволила ґарантовано звузити область неоднозначності розв’язку (ε-еквівалентність зростає із глибиною занурення контакту). Проте змістовний аналіз множини $\aleph$ можна зорієнтувати на здобуття тієї частини апріорної інформації, достовірність якої ґарантована попри існуючу невизначеність[23]. Тому процес побудови одиничних інтерпретацій, у яких яких корисну інформацію “розмазано” в окремих фрагментах розв’язку, слід доповнювати описом властивостей множини $\aleph$. Для цього окреслюють множину усієї наявної апріорної інформації $\Re$, якій відповідає певна множина $\aleph$ *допустимих розв’язків*. Для досліджуваної лінійної контактної задачі з обмеженнями (1.19-1.21) таку множину характеризує опис:

1) контактна границя в n точках, гладка за умовою $\left|\zeta(x)-\zeta(x+n\cdot\Delta x)\right|\le\omega(\zeta)$ на будь-якому відрізку $[c_1,c_2]\subset[c_0,c_3]$ з постійним кроком Δx;

2) у точках профілю $x_j,\ j=1,2,..M$ відомі оцінки глибини занурення контакту $\zeta(x_j)\ge h_j$;

3) апріорі обрано гіпотетичні оцінки $\zeta_{\max}(x)$ і $\zeta_{\min}(x)$, $\zeta_{\min}\le\zeta(x)\le\zeta_{\max}$, $x\in[c_0,c_3]$;

4) контактна границя розділяє два однорідні середовища з відомим перепадом густин $\sigma=\sigma_1-\sigma_2$;

5) спостережені в m точках значення поля $\tilde{U}(x_i)=U(x_i)+\delta U_i, i=\overline{1,N}$ містять випадкову похибку заданої інтенсивності $\|\delta U\|_{L_2}\le\delta$; $\tilde{U}(x_i)\in[c_0,c_3]$.

Ця інформація допоможе обрати деякий оптимальний роз’язок із множини еквівалентних, які задовольняють спостереженому полю в деякій метриці. Повноту врахування апріорної інформації, згідно [14, с. 88], забезпечить такий алгоритм, який використовує декомпозицію множини $\Re$ на дві підмножини $\Re_1\ge\Re_2$. Специфіка модельного класу $Nu^{(1,\alpha)}(1,D)$ зумовлює такий розподіл даних: до підмножини $\Re_2$ відносять умови 1-3, а

---

[23] Наприклад, конструкції альтернативних розв`язків $\zeta_{\max}$ і $\zeta_{\min}$, мірою стійкості яких може бути, за пропозицією Страхова [117], функція $\vartheta=\left|\zeta_{\max}(\xi)-\zeta_{\min}(\xi)\right|/\left\{\left|\zeta_{\max}(\xi)\right|+\left|\zeta_{\min}(\xi)\right|\right\},\forall\xi\in D$.

до інформації із $\Re_1$ – умови 4-5.

За наявності в геологічному розрізі просторово суміщених об'єктів різного рівня з надлишковою густиною різних знаків (тоді локальні поля компенсують одне одного і сумарне поле за амплітудою може стати меншим за похибку спостережень) виникає практична еквівалентність, яка ускладнює виділення подібних об'єктів [9, с. 47, 114, 116]. Для звуження її рамок провадять підбір одночасно за полем сили тяжіння і його трансформантами [9, 18] чи визначають наперед характер джерел [113, с. 15]. У теоретичному плані, мовлячи про еквівалентність, мають на увазі перерозподіл густини, який не викликає зовнішнього потенціалу; його властивості добре вивчено [70, 139 142, 146]. Зауважмо цікавий для нас результат [146, с.136]:

Лема 1.1. *Множину густин* $\sigma \in C^{(0,\alpha)}(\overline{D}), \overline{D} = D \cup \partial D$, *які створюють в області* D *із неявно заданою у вигляді* $f(x) = 0, f \in C^{(2,\alpha)}(D)$ *границею* ∂D *нульовий зовнішній потенціал* $U_l(x) = 0,\ x \in CD$, *описує вираз* $\sigma(\xi) = \Delta(f^2(\xi)\varphi(\xi))$, *де* $\varphi(\xi)$ – *довільна функція з класу* $C^{(2,\alpha)}(D) \cap C^{(0,\alpha)}(\overline{D})$.

***Зауваження* 1.17.** У рамках існуючої теорії інтерпретації даних потенціалу однозначно[24] визначати можна лише *гармонічні складові* густини реальних тіл, оскільки негармонічні не створюють зовнішнього потенціалу (наслідок леми Прилепка [71, 135]).

До того ж слід попередньо задати конфігурацію області D і точну праву частину відповідного функціонального рівняння для контакту. Але при геологічному формуванні тіл реалізується будь-який розподіл густини, не обов'язково гармонічний, а виділити його із континууму без додаткових даних неможливо. На сьогодні цю проблему вирішують шляхом сингулярних еквівалентних перерозподілів мас на основі апріорної інформації про розподіл густин, схованої у функціоналах типу норми [13, 19, 47, 48, 63, 112], чого зовсім недостатньо для індивідуалізації шуканого розподілу[25]. Очевидно, можливий і інший, комплексний підхід; детальний огляд цих питань виходить за рамки даної роботи і є складною самостійною проблемою.

Для поставленої задачі (1.46) з постійною густиною доцільно звузити область еквівалентності шуканого розв'язку через формальне обмеження у вигляді критерію належності заданому компакту

$$Z(\zeta) = \begin{cases} 0, & \zeta(x) \in Nu^{(1,\alpha)}(1, D) \\ \infty, & \zeta(x) \notin Nu^{(1,\alpha)}(1, D) \end{cases}. \tag{1.51}$$

---

[24] Задля однозначного визначення густини, яку описано квазілінійним рівнянням 2-го порядку в евклідовому просторі, слід додати граничні умови і вирішити відповідну нелінійну задачу; якщо оператор задачі – лапласіан, то згідно леми Прилепка, задача має єдиний розв`язок, а в інших випадках окрім вигляду оператора потрібно знати ще й граничні дані [146, с.234].

[25] Через це, зазвичай, зупиняються на найпростіших усереднених розв`язках, які дають однозначне визначення густини; якщо цього не досить, то застосовують комплексування геофіз. методів, хоч цей підхід належно не розвинуто [Жарков В.Н., и др. Физика Земли и планет. Фигура и внутреннее строение. - М.: Наука, 1971. - 384 с.].

Крім того, на кожному кроці ітерацій (1.47) слід враховувати природні обмеження: верхня границя контакту h_0 не виходить на поверхню $x_3 = 0$, а нижня h_1 не перетинає верхню (допускається співпадіння на окремих ділянках – виклинювання пластів).

Алгоритмізація пропонованої математичної моделі на основі аналізу індивідуальних особливостей класу розв'язків забезпечить потрібну точність, а доведення існування й єдиності розв'язків задачі у рамках цієї моделі послужить першою її апробацією, хоч остаточна перевірка – за дослідом. Існування розв'язків, згідно пропозиції [55], трактується через збіжність ітераційного процесу (1.47), тому розглянуті надалі теореми збіжності вважаємо теоремами існування розв'язку задачі. На перший план виходять питання розв'язуваності отриманих рівнянь за фіксованого індекса та збіжності відповідних послідовностей $\{\zeta_n(x)\}$ при $n \to \infty$; відповідям на них присвячено наступні розділи.

Підсумки 1-го розділу. Математична модель оберненої задачі відновлення контакту на майже необмежених і *істотно обмежених* множинах аналогічна моделі для нелінійної задачі [142]. Область аномальних джерел є обмеженою умовою (1.1) смугою, яка містить два однорідні циліндричні пласти порід різної густини з класу необмежених однозв'язних тіл, зірчастих щодо нескінченно віддаленої точки. *За значеннями вертикальної похідної логарифмічного потенціалу* (1.4), *ґенерованого масами з цієї смуги, потрібно відновити глибину і форму контакту пластів порід з відомим постійним перепадом густин*. На основі прийнятих модельних уявлень обґрунтовано математичну постановку задачі.

На структурному класі Страхова $St^{(1,\alpha)}(1,D)$, де нелінійна задача (1.4) коректно поставлена [142], виділено на основі обмежень (1.19-1.21) так званий клас Нумерова $Nu^{(1,\alpha)}(1,D)$ функцій контакту. Згідно теореми Нумерова [88], зв'язок між середовищем і полем на ньому у межах практичних похибок забезпечують лінеаризовані інтегральні рівняння ($1.23_{1,2}$); виведено відповідні їм посторові аналоги [94]. Розв'язки рівнянь на $Nu^{(1,\alpha)}(1,D)$ існують і єдині, якщо праву частину $u(x)$ задано на довгому профілі. Така постановка задачі неадекватна практиці гравіметрії.

Для відновлення контакту $\zeta(\xi)$ за полем $u(x)$, заданим на *істотно обмежених* відрізках на класі $Nu^{(1,\alpha)}(1,D)$ запропоновано еквівалентну обґрунтовану теоремою 1.1 систему рівнянь із швидко спадаючими ядрами (1.31) типу ядер інтерала Шварца (1.24) та її узагальнений варіант (1.42); зауважено можливість визначення з цієї системи магнітоактивних контактів. Розроблено обґрунтовані теоремою 1.2 альтернативні способи знаходження контакту $\zeta(x,h)$ з єдиного рівняння 1-го роду (1.39) з правою частиною (1.38) та їх узагальнення ($1.44_{1,2}$) і з комбінованої формули (1.40) та її узагальнення (1.45). Окреслено основні характеристичні властивості лінійних операторів (1.46), включаючи їх єдиність і стійкість. Декларовано обмеженість математичної моделі задачі, що проявляється широкою еквівалентністю її розв'язків. Проаналізовано структуру множини *допустимих розв'язків* отриманих рівнянь та доведено єдиність і стійкість розв'язків на компактному класі $Nu^{(1,\alpha)}(1,D)$.

Р О З Д І Л 2

МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗАННЯ ЛІНЕАРИЗОВАНОЇ ЗАДАЧІ ЗА ПОЛЕМ, ЗАДАНИМ НА НЕОБМЕЖЕНІЙ МНОЖИНІ

Наведено ітераційні процеси для розв'язку лінійного інтегрального рівняння з ядром Пуассона, та його узагальненого аналогу, незалежного від апріорі невідомого параметра *h*. Досліджено характеристики їх збіжності на класі Нумерова. Поліпшено алгоритми уточнень нумерівського наближення контакту та наведено схему екстраполяції поля за межі профілю.

У першому розділі отримано ряд лінійних інтегральних рівнянь 1-го роду для визначення контакту $\zeta(x,h)$ і $\zeta(x,\varsigma)$. Перед нами постають питання їх розв'язності, тобто вивчення умов єдиності, існування і стійкості розв'язків. Для рівнянь (1.23_1)-(1.44) їх буде розглянуто уперше, а для рівняння (1.23_2) цю проблему розглянуто в [4, 51], причому Б.О. Андреєв запропонував для розв'язку рівняння *спосіб послідовних наближень*, М.М. Лаврентьєв обґрунтував його не лише для рівняння (1.23_2), а і для інших видів операторних рівнянь 1-го роду, а В. М. Страхов [102] використав цей спосіб для знаходження розв'язку рівняння, аналогічного (1.39). Однак лишилось відкритим питання співвідношення швидкостей збіжності і точності послідовних наближень розв'язку кожного з рівнянь (1.23_2) і (1.39) та деякі інші властивості. Практична значущість цих досліджень полягає у тому, що *точність обчислення контактних границь залежить не лише від похибок функції* $v(x)$*, а й від довжини інтервалу її задання*.

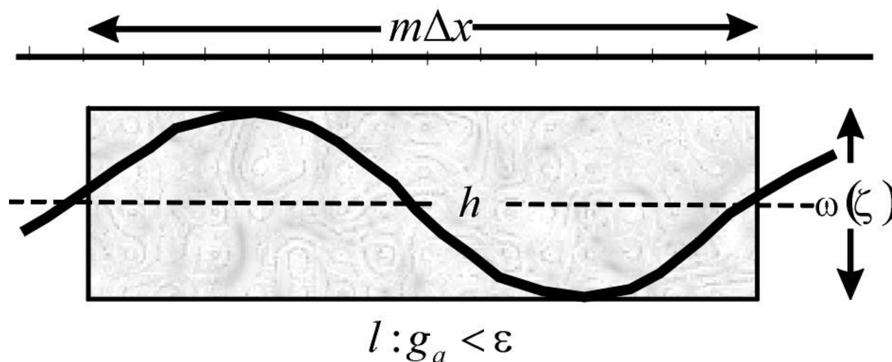


Рис. 2.1. Необхідна довжина профілю

Щоб оцінити необхідну для відновлення аномального контакту з гарантованою точністю довжину профілю, скористаймось простим емпіричним прийомом: поле на ділянці $l = m\,\Delta x$ змоделюємо впливом прямокутника потужністю $\omega(\zeta)$, апріорі більшим за ефект досліджуваного контакту; обчисливши із розв'язку прямої задачі, на якій віддалі від цього прямокутника його аномальний ефект стане меншим заданої точності ε, отримаємо бажану величину *l*. Для отримання значень поля з достатньою точністю слід обчислювати його на досить довгих профілях. При вирішенні даної контактної задачі не враховуємо крайові ефекти, але нескладний чисельний експеримент (обчислення трьох членів розкладу (1.4) в ряд для поля

вертикального циліндра з відношенням його радіуса до висоти $r/h = 1,3,5$) доводить, що подовження профілю ~ на $3h$ у кожен бік і фіксації кожної субпінійної ділянки Δx границі 2-3 точками достатньо для отримання розв’язку із задовільною точністю в 4.3%.

Аналіз існування розв’язку рівняння (1.10) на основі властивостей функцій $\zeta(x)$, заданих у необмеженій смузі:

$$D = \{<\xi,\zeta>: -\infty \le \xi \le \infty;\ 0 < h \le \zeta(x) \le h_0\},\ \ h_0 = \max_{x \in R^{(1)}} \zeta(x),\ \ h = \min_{x \in R^{(1)}} \zeta(x)$$

завершився [142, 94, с. 57] збудованим на компакті $St^{(1,\alpha)}(1,D)$ процесом послідовних наближень

$$\zeta_{n+1}(x) = u(x) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \ln\frac{(\xi - x)^2 + \zeta_n^2(\xi)}{(\xi - x)^2 + \zeta_n^2(x)}\,d\xi\ ,\ \zeta_0(x) = u(x),\ \ n = 0,\infty\ ,$$

що збігаються зі швидкістю геометричної прогресії із знаменником $2h^- / h^+$. О. О. Шванк [157, с. 373] запропонував еквівалентний[26] ітераційний процес

$$\zeta_{n+1}(x) = \zeta_n(x) + (u(x) - u_n(x)),\ \ \zeta_0(x) = u(x),$$

де $u_n(x)$ – ефект n-го наближення; його збіжність не доведено строго, а лише окреслено на чисельних прикладах.

2.1. Спосіб Нумерова розв’язання контактної задачі

Найперший спосіб отримання наближеного розв’язку $\zeta(x;h)$ нелінійного інтегрального рівняння (1.10) базується на припущенні про належність його розв’язку $\zeta(x)$ до певного класу, формалізованого множиною $Nu^{(1,\alpha)}(1,D)$. Такий стан речей дав змогу лінеаризувати рівняння (1.10) з точністю до сталої [58, с. 51] до вигляду[27]

$$\frac{V_z(x_0)}{2\pi\gamma\sigma} \equiv u(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2 + (\xi - x)^2}\zeta(\xi)d\xi - \zeta(x),$$

де $V_z(x_0)$ – аномалія поля в деякій фіксованій точці x_0, у якій апріорі відомо глибину $h = \zeta(x_0)$ до контактної поверхні, а припущення про те, що *контактну границю у першому наближенні можна замінити функцією, яка описує відповідним чином каліброване поле* $u(x)$, дозволило подати друге і остаточне наближення границі у такому вигляді, який визначає розв’язок $\zeta(x)$ як *аналітичне продовження* напруженості поля $u(x)$ в бік тяжіючих мас на *середню глибину* h шуканого контакту:

$$h(x) = u(x) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{(\xi - x)^2 + h^2}{(\xi - x)^2 + \zeta^2(\xi)}d\xi \Rightarrow \zeta(x;h) \approx u(x) - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2 + (\xi - x)^2}[u(\xi) - h]d\xi,\ \ (2.1_1)$$

аналогічне міркування справедливе для узагальненого виразу (1.15)

---

[26] Строге обґрунтування їх еквівалентності наведено в [87, с. 61].

[27] В якому перша складова виражає потенціал тяжіння мас, розміщених в областях ундуляції кривої контакту відносно деякої лінії середньої глибини h, а друга – потенціал від горизонтального плоскопаралельного шару над цією лінією.

$$\zeta(x)=u(x)-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{(\xi-x)^2+\zeta^2(\xi)}{(\xi-x)^2+\zeta^2(x)}d\xi\Rightarrow\zeta(x)\approx u(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\zeta(x)}{\zeta^2(\xi)+(\xi-x)^2}\zeta(\xi,x)d\xi, \qquad (2.1_2)$$

де $\zeta(\xi,x)=\zeta(\xi)-\zeta(x)$. На основі такого тлумачення лінеаризації (*зауваження* 1.7) це наближення можна подати у еквівалентному вигляді $\zeta(x,h)=u(x,-h)-2u(x)$; отже, для його знаходження досить обчислити значення "середньої" глибини h при додаткових вимогах з підмножини $\Re_2$.

***Зауваження* 2.1**. До речі, таке трактування дозволяє означити головні властивості розв`язку – *неперервність* і *гладкість* функцій контакту. Інтеграл Пуассона через неперервність свого ядра однозначно переводить будь-яку кусково-неперервну функцію в неперервну, тоді як обернена задача відновлення неперервної функції із кусково-неперервної неоднозначна. Через це при визначенні контактної поверхні (якщо окремо не задано розмір і характер розриву неперервності), звичайно, обмежуються неперервними і гладкими розв`язками.

Наближення $\zeta(x,h)$ прийнято вважати остаточним, хоча ще в [58, с. 54] відзначено його низьку точність. Відзначмо, що інтегральний вираз (2.1_1) в трактовці Нумерова залишився нерегуляризованим, в силу чого справедливий лише для шару, верхньою границею якого є поверхня спостережень. Для загального випадку, властивого нашій постановці, його слід уточнити.

Наведемо відповідні міркування. Нехай $u(x)$ – вертикальна складова напруженості поля $U_{x_2}(x)$, а глибину контакту h задано не в точці x, а в деякій іншій точці $y\in R^{(1)}$. Запишімо, виходячи із співвідношення (1.23_2) різницевий вираз

$$u(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h-y}{(h-y)^2+(\xi-x)^2}\zeta(\xi)d\xi$$

і визначмо граничні при $y\to h$ значення $u_i(x,h)$ і $u_e(x,h)$, відповідно, знизу (при $y<h$) і зверху (при $y>h$); отримаємо в підсумку

$$\lim_{y\to h}u(x,h)=\frac{1}{\pi}\lim_{y\to h}\left(\int_{-\infty}^{x-\varepsilon}+\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}+\int_{x+\varepsilon}^{\infty}\right)\frac{h-y}{(h-y)^2+(\xi-x)^2}\zeta(\xi)d\xi=$$

$$=\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{h-y}{(h-y)^2+\eta^2}\zeta(\eta+x)du=\begin{cases}+\zeta(x), y<h\\ -\zeta(x), y>h\end{cases},$$

позаяк $u(x)$ відокремлено від нуля, інакше в дужці { був би третій член. Інтеграли в дужках розуміємо в смислі головного значення, враховуючи їх розбіжність відповідним розбиттям проміжку інтегрування на три ланки й інтегруючи в узагальненому смислі [18]. Підсумком цих дій маємо вираз

$$u_i(x,h)=\zeta(x),\quad u_e(x,h)=-\zeta(x).$$

Його безпосереднім наслідком являються, по-перше, відношення Пуассона й Сохоцького-Племелі, принагідно відновлені для прямої $y=h$

$$u_e(x,h)-u_i(x,h)=-2\zeta(x),\ u_e(x,h)+u_i(x,h)=0,$$

а по-друге, можливість переписати наближення (2.1) у вигляді [62]

$$\zeta(x,h)=u(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}[u(\xi,h)-u(x,h)]d\xi\,. \qquad (2.2)$$

Наголосимо, що для покращення лінеаризованого наближення $\zeta(x,h)$ достатньо обчислити значення поля $u(x,h), x\in R^{(1)}$, $h^- \le h \le h^+$, на тій глибині h, яка відома з постановки задачі[28].

Таким чином, *наближений розв'язок оберненої задачі для контактної поверхні в рамках лінеаризації визначається значенням каліброваного поля*[29] *на рівнях* $y=0$ *й* $y=-h$, на першому з яких значення поля задають, а на іншому – обчислюють як аналітично продовжену в бік тяжіючих мас гармонічну функцію за заданими граничними значеннями. Отримане наближення $\zeta(x,h)$ апроксимує розв'язок $\zeta(x)$ із класу $Nu^{(1,\alpha)}(1,D)$ з точністю до квадрату величини $h^{-1}\omega(\xi)$, де $\omega(\xi)=h^+-h^-$ – *коливання* контакту $\zeta(x)$.

***Зауваження* 2.2**. За формулою (2.2) не можна знайти аналітично продовжених на рівень $y=h>0$ значень $u(x,0)$ (строго визначити гармонічну функцію $u(x,h)$), оскільки пряма $y=h$ розтинає тяжіючі маси на дві частини, одна з яких знаходиться *нижче* прямої $y=h$ (всередині мас при $\zeta(x)\le h$). Через це функція $u(x,y)$ при $y<h$ не є *гармонічною*, що заважає отримати інтегральну складову в (2.2). Одначе, якщо формально за допомогою інтегралу Пуассона

$$u(x,0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}u(\xi,h)d\xi \qquad (2.3)$$

"*продовжити*" задане поле $u(x,0)$ до рівня $y=h$, то *результат* $u(x,h)$ *можна тлумачити як граничне значення поля сконденсованих на прямій* $y=h$ *тяжіючих мас*.

Обґрунтування такого тлумачення значень $u(x,h)$ повністю випливає із співвідношень $u_i(x,h)$, $u_e(x,h)$ та *зауваження* 1.7.

2.2. Уточнення наближення Нумерова

Основою вадою наближення Нумерова є низька точність обчислень за формулою (2.2). Заміна точного інтегрального рівняння наближеним, отриманим через розклад підінтеґрального виразу в ряд за ступенями, суттєво спотворює розв'язок задачі. Отримане "в лоб" рішення можна використати лише як "нульове" наближення, яке потрібно надалі ітераційно уточнювати. Для подолання цієї вади нижче пропонується скористатись іншими співвідношеннями, основаними на пошукові поправок до наближення Нумерова методом ітерацій. Складність такого підходу полягає в тому, щоб вказати деяку оптимальну в рамках варіаційних принципів відбору конструкцію поправок. Виявляється, для їх знаходження

---

[28] Визначення контакту трактується як продовження аномального поля з рівня $y=0$ на рівень $y=-h$.

[29] Згідно припущення на початку розділу: аналітичною підставою заміни *поля* на *контакт* є зображення їх однією й тією ж витокоподібною функцією на класі єдиності $Nu^{(1,\alpha)}(1,D)$.

можна застосувати відносно прості і надійні формули, виведені, відповідно, М.Р. Малкіним [56], О.К. Сеньком [76] і Б.О. Андреєвим [5], які поліпшують розв'язок нумерівського наближення. При цьому проявляється тісний зв'язок між задачею знаходження наближень контакту в класі $Nu^{(1,\alpha)}(1,D)$ та аналітичного продовження в нижню площину. Згадані чисельні способи хоч і не мають важливого прикладного значення в сенсі сформульованої задачі, заслуговують на згадку як джерела аналітичних апроксимацій в прямих задачах та в історичному контексті розвитку теорії контактних задач.

Розпочнімо огляд способів уточнень із способу Андреєва, хоч він не є першим у часі; причину такого ходу прояснимо згодом.

***Зауваження* 2.3.** Трактуючи визначення контакту в руслі аналітичного продовження значень $u(x,h)$, визначмо аналітично продовжені на рівень $y=h$ значення гармонічної функції $u(x,y)$ через розв'язок рівняння (2.3) у вигляді границі послідовності $\{u_n(x,h)\}$ функцій, генерованих процесом послідовних наближень

$$u_{n+1}(x,h)=u(x,0)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}u_n(\xi,h)d\xi+u_n(x,h),\ \ u_0(x,h)=u(x,0),\ n=\overline{0,\infty}\ . \quad (2.4)$$

Називатимемо цей процес надалі процесом[30] Лаврентьєва-Андреєва.

2.2.1. Спосіб Б.А. Андреєва. Його суть полягає в апроксимації інтегралу (2.2) певною інтеґральною сумою, біноміальні коефіцієнти при якій знаходять через інтегрування ядра рівняння у відповідних границях. Вирішувати отриману систему лінійних рівнянь Андреєв запропонував методом простих ітерацій; при цьому "накопичення похибок майже не відбувається, оскільки в окремих точках вони переважно взаємно компенсуються..." [4, с. 260]. Власне, основні досягнення Андреєва підсумовує така теорема.

Теорема Андреєва. *Якщо розв'язок* $\zeta(x)$ *нелінійного інтегрального рівняння для контактної границі* (1.4) *належить до класу* $Nu^{(1,\alpha)}(1,D)$, *то його лінеаризоване наближення виражається у вигляді*

$$\zeta^{(n)}(x,h)=u(x)-\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1}C_{n+2}^{k+1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{kh}{(kh)^2+(\xi-x)^2}\left[u(\xi,0)-u(x,0)\right]d\xi \qquad (2.5)$$

і від істинного відхиляється не більш, ніж на $h^{-2}\omega^2(\xi)$ *при* $h\to\infty$[31].

Доведення. Спочатку переконаймось в істинності подання (2.5); перш за все з виразу (2.4) послідовно отримуємо:

---

30 Будувати послідовність, яка апроксимує точний розв`язок задачі на образі з області існування розв`язку, слід по відшуканню умов однозначного обернення операторного рівняння (доведення теореми єдиності). Гадаю, можна послатись на теорему єдиності відповідного нелінійного рівняння [142, с. 58] і висновок 1.1; при цьому похибки лінеаризації не виводять рівняння поза за клас єдиності в силу вкладання $Nu_2^{(1,\alpha)}(1,D)\subset St^{(1,\alpha)}(1,D)$.

31 Дещо під іншим ухилом це співвідношення отримано в [32, с. 262].

$$u_0(x,h)=u(x,0),\; u_1(x,h)=u(x,0)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}u(\xi,0)d\xi+u(x,0)=2u(x,0)-u(x,-h),$$

$$u_2(x,h)=u(x,0)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}u_1(\xi,h)d\xi+u_1(x,h)=3u(x,0)-3u(x,-h)+u(x,-2h),$$

а згодом індукцією за індексом $i=\overline{0,n}$ наступне значення

$$u_n(x,h)=u(x,0)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}u_{n-1}(\xi,h)d\xi+u_{n-1}(x,h)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_{n+1}^{k+1}u(x,-kh), \quad (2.6)$$

де $u(x,-kh)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{kh}{(kh)^2+(\xi-x)^2}u(\xi,0)d\xi,\quad C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!},\; k=\overline{1,\infty}$. (2.7)

Переконаймось у справедливості індукційного співвідношення (2.6) для будь-якого натурального n. Попередньо відзначмо перетворення [29]:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(t-x)^2}\cdot\frac{kh}{(kh)^2+(\xi-t)^2}dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(t-x)^2}dt\int_0^{\infty}e^{-k\omega h}\cos\omega(\xi-t)d\omega=$$

$$=\frac{2h}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-k\omega h}\cos\omega(\xi-x)d\omega\int_0^{\infty}\frac{\cos\omega u}{h^2+u^2}du=\frac{(k+1)h}{[(k+1)h]^2+(\xi-x)^2},h>0, \quad (2.8)$$

оскільки має місце інтеграл Лапласа $\frac{1}{\pi}\int\cos\omega x\, e^{-\omega h}d\omega=\frac{1}{\pi}\frac{\pi h}{h^2+x^2}$.

Припустімо, що формула (2.6) вірна для деякого фіксованого значення n; тоді для наступного значення $n+1$ знаходимо

$$u_{n+1}(x,h)=u(x,0)-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_{n+1}^{k+1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}u(\xi,-kh)d\xi+\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_{n+1}^{k+1}u(x,-kh).$$

Перетворимо першу суму з врахуванням виразів (2.6-2.8) детальніше:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_{n+1}^{k+1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}u(\xi,-kh)d\xi=C_{n+1}^{1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}u(\xi,0)d\xi+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k C_{n+1}^{k+1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(k+1)h}{[(k+1)h]^2+(\xi-x)^2}u(\xi,0)d\xi=C_{n+1}^{1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}u(\xi,0)d\xi+$$

$$+\sum_{k=2}^{n+1}(-1)^{k+1}C_{n+1}^{k}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{kh}{(kh)^2+(\xi-x)^2}u(\xi,0)d\xi=\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1}C_{n+1}^{k}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{kh}{(kh)^2+(\xi-x)^2}u(\xi,0)d\xi .$$

Опісля, зауважуючи, що $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$, $C_{n+1}^0=1$, отримуємо $C_{n+1}^k+C_{n+1}^{k+1}=C_{n+2}^{k+1}$, та

$$u_{n+1}(x,h)=C_{n+1}^0 u(x,0)+C_{n+1}^1 u(x,0)+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k C_{n+1}^k u(x,-kh)+(-1)^{n+1}C_{n+1}^{k+1}u(x,-(n+1)h)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k C_{n+1}^{k+1}u(x,-kh)=\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k C_{n+2}^{k+1}u(x,-kh).$$

Отже, ми переконались у справедливості формули (2.6) для певного числа $n+1$, якщо вона вірна для цілого числа n. А оскільки вона очевидно вірна для $n=0,1,2$, то вірна й для *будь-якого* додатного числа n. Допустимо зараз, що має місце граничне відношення

$$\lim_{n\to\infty}u_n(x,h)=u(x,h) \quad (2.9)$$

і на основі виразу (2.2) та цього припущення відзначаємо, що

$$\zeta^{(n)}(x,h)=u(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}\left[u_n(\xi,h)-u_n(x,h)\right]d\xi=u(x)-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_{n+1}^{k+1}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}u_n(\xi,h)d\xi+\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_{n+1}^{k+1}u(x,-kh)=u(x)-\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\left[C_{n+1}^{k}+C_{n+1}^{k+1}\right]\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\frac{kh}{(kh)^2+(\xi-x)^2}u(\xi,0)d\xi-\frac{(-1)^{n+2}}{\pi}C_{n+2}^{k+2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(n+1)h}{[(n+1)h]^2+(\xi-x)^2}u(\xi,0)+C_{n+1}^{1}u(x,0)=$$

$$=u(x)-\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1}C_{n+2}^{k+1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{kh}{(kh)^2+(\xi-x)^2}u(\xi,0)d\xi+C_{n+1}^{1}u(x,0). \qquad (2.10)$$

Надалі, беручи до уваги тотожність типу інтеграла Лапласа $\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{kh}{(kh)^2+(\xi-x)^2}=1$,

спрощуємо вираз до

$$C_{n+1}^{1}u(x,0)=C_{n+1}^{1}u(x,0)+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\left[C_{n+1}^{k+1}-C_{n+1}^{k+1}\right]u(x,0)=\frac{1}{\pi}C_{n+1}^{1}u(x,0)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}d\xi+$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}C_{n+1}^{k+1}u(x,0)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{kh}{(kh)^2+(\xi-x)^2}d\xi-\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}C_{n+1}^{k+1}u(x,0)\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(k+1)h}{[(k+1)h]^2+(\xi-x)^2}d\xi=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1}C_{n+2}^{k+1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{kh}{(kh)^2+(\xi-x)^2}u(x,0)d\xi;$$

посилаючись на щойно отриману тотожність і подання (2.10), остаточно переконуємось у справедливості формули (2.5).

Доведення другої частини теореми – граничної рівності (2.9) отримаємо згодом при розгляді збіжності ітераційного процесу (2.4), а наразі зауважмо: якщо послідовність $\{u_n(x,h)\}$ збігається[32], то гранична функція $u(x,h)$ обов'язково задовольняє рівнянню (2.3); це очевидно із співвідношення (2.4) при $n\to\infty$.

Відзначмо деякі цікаві *частинні випадки* формули (2.5). За *нульове наближення* $\zeta_0(x)$ контакту візьмімо в силу справедливості лінеаризації (2.1_1) вираз
(2.2) Нумерова, у якому глибина h перерахунку значень $u(x,0)$ не перевищує відстані до найближчої особливості поля. Обмежуючись наближеним перерахунком поля на глибину, отримуємо серію різноманітних наближень. Так, при $n=0$ отримаємо наближення Б.В. Нумерова [64]

$$\zeta^{(0)}(x,h)=u(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}\Delta u(\xi,x)d\xi,\ \ \Delta u(\xi,x)=[u(\xi,0)-u(x,0)], \qquad (2.11)$$

а при $n=1$ – наближення Д. Х'юза [162]

---

32 Андреєв довів рівномірну збіжність ряду з допомогою мажорантного гармонічного ряду, одначе ще Маловичко [58, с. 81] відзначив необґрунтованість процедури визначення області збіжності ряду Андреєва; ми попереду наведемо *достатнє* обґрунтування цього питання.

$$\zeta^{(1)}(x,h)=u(x)-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{3h}{h^2+(\xi-x)^2}-\frac{2h}{(2h)^2+(\xi-x)^2}\right\}\Delta u(\xi,x)d\xi\,, \quad (2.12)$$

при n = 2 – наближення В.М. Страхова [109]:

$$\zeta^{(2)}(x,h)=u(x)-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{6\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}-4\frac{2h}{(2h)^2+(\xi-x)^2}+\frac{3h}{(3h)^2+(\xi-x)^2}\right\}\Delta u(\xi,x)d\xi\,. \quad (2.13)$$

Усі наближення отримано за такою схемою: за формулою

$$u(x,h)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\,C_{n+1}^{k+1}\,u(x,-kh),\; u(x,-kh)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{kh}{(kh)^2+(\xi-x)^2}u(\xi,0)d\xi, u(x,0)=u(x),$$

що випливає з процесу Лаврентьєва-Андреєва, обчислюємо відповідні наближе ння поля на глибині h, і, підставивши їх в *нульове наближення* $\zeta_0(x)$, після нескладних викладок, спрямованих на отримання додатного підінтегрального переретворення[33], яке згладжує похибки вихідної функції, приходимо до однієї з вищенаведених формул за відповідного n.

Формули (2.12), (2.13), а також Б.О. Андреєва (2.5) при $n \geq 3$ гірше пристосовані для практичних обчислень, ніж формула Нумерова (2.11); їх використання призводить до накопичення великих похибок, що зростають разом з номером наближення при обчисленні в околі точки $\xi = x$, оскільки ядра інтегралів підсумовують з різними знаками при біноміальних коефіцієнтах [75]. До того ж спосіб Андреєва пов`язаний із значним обсягом обчислень (56 квадратур для 10 точок поля). Ці недоліки не властиві формулі (2.11); задля поширення цієї якості на формули з індексами $n>0$, перетворімо їх, підсумовуючи елементарні дроби з ядра того чи іншого перетворення. Так, для перетворення Д. Х'юза [162] отримуємо

$$\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\,C_3^{K+1}\,\frac{kh}{(kh)^2+(\xi-x)^2}=\frac{\left[10h^2+(\xi-x)^2\right]h}{\left[h^2+(\xi-x)^2\right]\left[(2h)^2+(\xi-x)^2\right]}>0,$$

а для ядра перетворення В.М. Страхова [109]

$$\sum_{k=1}^{3}(-1)^{k+1}\,C_4^{K+1}\,\frac{kh}{(kh)^2+(\xi-x)^2}=\frac{\left[156h^4+13h^2(\xi-x)^2+(\xi-x)^4\right]h}{\left[h^2+(\xi-x)^2\right]\left[(2h)^2+(\xi-x)^2\right]\left[(3h)^2+(\xi-x)^2\right]}>0,$$

для ядра перетворення Б.О. Андреєва [4] при $n=3$

$$\sum_{k=1}^{4}(-1)^{k+1}\,C_3^{K+1}\,\frac{kh}{(kh)^2+(\xi-x)^2}=$$

$$=\frac{\left[3696h^6+124h^4(\xi-x)^2+29h^2(\xi-x)^4+(\xi-x)^6\right]h}{\left[h^2+(\xi-x)^2\right]\left[(2h)^2+(\xi-x)^2\right]\left[(3h)^2+(\xi-x)^2\right]\left[(4h)^2+(\xi-x)^2\right]}>0,$$

одначе вже при $n=4$ $\quad\sum_{k=1}^{5}(-1)^{k}\,C_6^{K+1}\,\frac{kh}{(kh)^2+(\xi-x)^2}=$

$$=\frac{\left[125280h^8-3404h^6(\xi-x)^2+969h^4(\xi-x)^4+54h^2(\xi-x)^6+(\xi-x)^8\right]h}{\left[h^2+(\xi-x)^2\right]\left[(2h)^2+(\xi-x)^2\right]\left[(3h)^2+(\xi-x)^2\right]\left[(4h)^2+(\xi-x)^2\right]\left[(5h)^2+(\xi-x)^2\right]}<0.$$

Отже, ядра відповідних перетворень для $n=1,2,3$ додатні, у той час як ядро для $n=4$

---

[33] Уже наступне $\zeta_0^3(x)$ наближення, отримане за описаною схемою, має знакозмінне ядро і тому не має відзначеної в попередніх наближень властивості згладжування похибок.

вже не є таким. Виходячи з цього, варто в практичних обчисленнях обрати за *нульове наближення* вираз (2.2), а надалі обмежитись однією з формул

$$\zeta^{(1)}(x,h)=u(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left[10h^2+(\xi-x)^2\right]h}{\left[h^2+(\xi-x)^2\right]\left[(2h)^2+(\xi-x)^2\right]}\Delta u(\xi,x)d\xi,\ \Delta u(\xi,x)=\left[u(\xi)-u(x)\right],$$

$$\zeta^{(2)}(x,h)=u(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left[156h^4+13h^2(\xi-x)^2+(\xi-x)^4\right]h}{\left[h^2+(\xi-x)^2\right]\left[(2h)^2+(\xi-x)^2\right]\left[(3h)^2+(\xi-x)^2\right]}\Delta u(\xi,x)d\xi, \quad (2.14)$$

$$\zeta^{(3)}(x,h)=u(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left[3696h^6+124h^4(\xi-x)^2+29h^2(\xi-x)^4+(\xi-x)^6\right]h}{\left[h^2+(\xi-x)^2\right]\left[(2h)^2+(\xi-x)^2\right]\left[(3h)^2+(\xi-x)^2\right]\left[(4h^2)+(\xi-x)^2\right]}\Delta u(\xi,x)d\xi$$

для обчислення послідовних наближень контактної границі $\zeta^{(n)}(x,h)$.

Незважаючи на проведену трансформацію формул (2.12-2.13) до вигляду (2.14), жодне з лінеаризованих наближень $\zeta^{(n)}(x,h)$, $n=0,1,2,3$ контакту не можна вважати настільки ж точним, як формулу (2.2); будь-якому з них потрібні подальші уточнення. Для цієї мети, як згадувалось вище, можна пристосувати принаймні два способи. Сформулюймо їх з належною строгістю.

2.2.2. Спосіб Малкіна. Першою у геофізичній літературі на цю тему з'явилась стаття М.Р. Малкіна [56], в якій отримано інтегральне рівняння для визначення потужності однорідного матеріального шару за значенням поля на площині. Суть способу Малкіна в адаптації до нашої задачі у повному обсязі змальовує теорема, названа нами теоремою Малкіна.

Теорема Малкіна. *Корекція кожного з лінеаризованих наближень* (2.14) *розв'язку* $\zeta^{(n)}(x,h)$ *рівняння для контактної границі на величину поправки* $\zeta_1^{(n)}(x,h)=\zeta^{(n)}(x,h)+\Delta\zeta(x,h)$, *де*

$$\Delta\zeta(x,h)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h^2-(\xi-x)^2}{\left[h^2+(\xi-x)^2\right]^2}\left[u(\xi,h)-u(x,h)\right]d\xi, \quad (2.15)$$

підвищує точність наступних наближень на порядок порівняно з початковими, тобто до величини $h^{-3}\omega^3(\xi)$. *Практично достатньо точне наближення поправки* $\Delta\zeta(x,h)$ *забезпечує величина*

$$\Delta\tilde{\zeta}(x,h)=u(\xi_0)\cdot\frac{\partial u(x,-h)}{\partial y},$$

де $u(\xi_0)$ *– деяке "середнє" значення поля на осі* $O\zeta_2$.

Доведення. З умови належності розв'язку $\zeta(x)$ до класу $Nu^{(1,\alpha)}(1,D)$ випливає розклад підінтегрального виразу в рівнянні для контакту [87]. Подавши рівняння (1.4) з точністю до $h^{-3}\omega^3(\xi)$ при позначенні $\zeta(\xi,h)=\zeta(\xi)-h$, у вигляді

$$u(x)=\zeta(x)+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2h}{h^2+(\xi-x)^2}\zeta(\xi,h)d\xi+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\xi-x)^2-h^2}{\left[h^2+(\xi-x)^2\right]^2}\zeta^2(\xi,h)d\xi,$$

і вводячи лінійну густину $\mu(\xi,h)=\sigma\zeta(\xi,h)$ сконденсованих на прямій h = const мас за умови $u^+(x,h)=\mu(x),\ u^-(x,h)=-\mu(x),\ u^0(x,h)=0$ отримаємо

$$u(x,0)=\zeta(x)+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}[u(\xi,h)-u(x,h)]d\xi+\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\xi-x)^2-h^2}{\left[h^2+(\xi-x)^2\right]^2}[u(\xi,h)-u(x,h)]^2d\xi$$

при $h^-\le h\le h^+$, але в силу того, що мають місце співвідношення [146, с. 245]

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}d\xi=1,\ \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\xi-x)^2-h^2}{\left[h^2+(\xi-x)^2\right]^2}d\xi=0,\ \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}u(\xi,h)d\xi=u(x,0),$$

$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\xi-x)^2-h^2}{\left[h^2+(\xi-x)^2\right]^2}u(\xi,h)d\xi=\frac{\partial u(x,0)}{\partial z}$, отримуємо відкалібрований вираз

$$u(x,0)=\zeta(x)+\{u(x,0)-u(x,h)\}-\frac{1}{2\pi}u(x,h)\frac{\partial u(x,0)}{\partial z}+\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\xi-x)^2-h^2}{\left[h^2+(\xi-x)^2\right]^2}u^2(\xi,h)d\xi,$$

у якому останню складову зображено у вигляді:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\xi-x)^2-h^2}{\left[h^2+(\xi-x)^2\right]^2}[u(\xi,h)-u(y,h)+u(y,h)]u(\xi,h)d\xi=$$

$$=u(y,h)\frac{\partial u(x,0)}{\partial z}+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\xi-x)^2-h^2}{\left[h^2+(\xi-x)^2\right]^2}[u(\xi,h)-u(x,h)]u(\xi,h)d\xi\,.$$

Нехтуючи останнім інтегралом, остаточно отримуємо

$$\zeta(x)=u(x,h)+\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{\partial u(x,0)}{\partial z}\left[u(x,h)-\frac{1}{2}u(y,h)\right].$$

Звідси та на основі граничних відношень (2.1) отримаємо, зафіксувавши значення $\zeta(x)=h$, наступне наближення

$$\zeta_1(x,h)=u(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}[u(\xi,h)-u(x,h)]d\xi+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h^2-(\xi-x)^2}{\left[h^2+(\xi-x)^2\right]^2}[u(\xi,h)-u(x,h)]^2d\xi\,.$$

Відновлюючи значення $u(x,h)$ гармонічної функції за допомогою ітераційного процесу (2.4) і, обмежуючись першими чотирма наближеннями $\zeta^{(n)}(x,h),\ n=0,1,2,3$, переконуємось у справедливості першої частини твердження, що доводиться. Доведення другої частини теореми почнімо з перетворення очевидного наближення

$$\Delta\tilde{\zeta}(x,h)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h^2-(\xi-x)^2}{\left[h^2+(\xi-x)^2\right]^2}[u(\xi)-u(x)]^2d\xi$$

поправки $\Delta\zeta(x,h)$. Зводячи в квадрат різницю $u(\xi)-u(x)$ та інтегруючи отриманий вираз частинами, приходимо до співвідношення

$$\Delta\tilde{\zeta}(x,h)=\frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}u(\xi)\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi}\frac{\xi-x}{h^2+(\xi-x)^2}d\xi+u(x)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h^2-(\xi-x)^2}{\left[h^2+(\xi-x)^2\right]^2}u(\xi)d\xi\right\}.$$

Нехай $\alpha_k\le x\le\alpha_{k+1},\ k=1,2,\dots,n;\ \alpha_1=-\infty,\ \alpha_{n+1}=\infty,$ – відрізки осі, на яких функція $f(\xi)=\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi}\frac{\xi-x}{h^2+(\xi-x)^2}$ зберігає знак. Ясна річ, другий множник $f(\xi)$ змінює на осі знак

лише один раз у точці $\xi = x$ і тому функція $f(\xi)$ зберігає знак в основному на ділянках *монотонного зростання* (*спадання*) функції $u(x), x \in R^{(1)}$, за винятком, може, околу точки $\xi = x$. Беручи це до уваги й посилаючись на теорему про *середнє значення* означеного інтегралу [126], можемо записати

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(\xi)\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi}\frac{\xi - x}{h^2 + (\xi - x)^2}d\xi = \sum_{k=1}^{n} u(\xi_1)\left\{u(\alpha_{k+1})\frac{\alpha_{k+1} - x}{h^2 + (\alpha_{k+1} - x)^2} - u(\alpha_k)\frac{\alpha_k - x}{h^2 + (\alpha_k - x)^2}\right\} -$$

$$-\sum_{k=1}^{n} u(\xi_k)\int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} \frac{h^2 - (\xi - x)^2}{\left[h^2 + (\xi - x)^2\right]^2}u(\xi)d\xi .$$

Вводячи до розгляду *середнє* значення поля[34] $u(x_0) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u(\xi_k),\ \alpha_k \le \xi_k \le \alpha_{k+1}$, пере

пишемо попередній вираз у вигляді

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(\xi)\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi}\frac{\xi - x}{h^2 + (\xi - x)^2}d\xi = \sum_{k=1}^{n}\left[u(\xi_k) - u(x_0)\right]\left\{u(\alpha_{k+1})\frac{\alpha_{k+1} - x}{h^2 + (\alpha_{k+1} - x)^2} - u(\alpha_k)\frac{\alpha_k - x}{h^2 + (\alpha_k - x)^2}\right\} -$$

$$+ u(x_0)\sum_{k=1}^{n}\left[u(\alpha_{k+1})\frac{\alpha_{k+1} - x}{h^2 + (\alpha_{k+1} - x)^2} - u(\alpha_k)\frac{\alpha_k - x}{h^2 + (\alpha_k - x)^2}\right] -$$

$$-\sum_{k=1}^{n}\left[u(\xi_k) - u(x_0)\right]\int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} \frac{h^2 - (\xi - x)^2}{\left[h^2 + (\xi - x)^2\right]^2}u(\xi)d\xi - u(x_0)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h^2 - (\xi - x)^2}{\left[h^2 + (\xi - x)^2\right]^2}u(\xi)d\xi .$$

Друга з чотирьох складових в описаній сумі дорівнює нулю. Припустимо, що величини $u(\xi_k) - u(x_0)$ теж малі; тоді, очевидно, перша й третя складові мало ухилятимуться від нуля і поправка Малкіна виглядатиме як

$\Delta\tilde{\zeta}(x,h) \approx u(\xi_0)\frac{\partial u(x,-h)}{\partial y}$, де $u(\xi_0) = u(x_0) - u(x)$, а

$$\frac{\partial u(x,-h)}{\partial y} = \frac{1}{\pi}\lim_{y \to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial y}\frac{h - y}{(h - y)^2 + (\xi - x)^2}u(\xi,0)d\xi = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h^2 + (\xi - x)^2}{\left[h^2 + (\xi - x)^2\right]^2}u(\xi)d\xi,$$

що й доводить теорему. ■

Отже, для уточнення наближень (2.14) за схемою Малкіна потрібна додаткова інформація у вигляді "вертикальної" похідної поля, продовженої вниз на деяку *середню* глибину h.

Зауваження 2.4. Поправку Малкіна $\Delta\tilde{\zeta}(x,h)$ доцільно обчислювати лише для нульового нумерівського наближення $\zeta^{(0)}(x,h)$ за цілковитої відсутності даних про розподіл значень $u(x,h)$; навіть у такій ситуації її використання не завжди веде до поліпшення отриманого наближення, особливо коли різниці $u(\xi_k) - u(x_0),\ k = 1,2,..,n$ не дуже малі. Схеми обчислень поправок $\Delta\zeta(x,h)$ і $\Delta\tilde{\zeta}(x,h)$ практично еквівалентні, тому заради економії обчислень слід надавати перевагу першій з них.

Відновімо тепер інший спосіб уточнення лінеаризованих наближень контактної задачі,

---

34 До речі, його можна отримати за принципом Страхова осереднення *пробних* розв`язків [113].

запропонований О.К. Сеньком [76].

2.2.3. Спосіб Сенька. Адаптуймо цей спосіб щодо постановки задачі (1.22), оскільки сам Сенько дав виведення стосовно горизонтального градієнту прискорення W_{xz}. Суть його пропозиції найкраще передає наступне твердження, представлене нами як теорема.

Теорема Сенька. *Уточнення кожного з лінеаризованих наближень* (2.14) *розв'язку* $\zeta^{(n)}(x,h)$ *нелінійного рівняння для контактної границі поправкою, яка визначається з лінійного інтегрального рівняння першого роду*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\zeta(\xi)}{\left[\zeta^{(n)}(x,h)\right]^2+(\xi-x)^2}d\zeta=v(x), \qquad (2.16)$$

де $v(x)=u(x)-\zeta^{(k)}(x,h)+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{(\xi-x)^2+\left[\zeta^{(k)}(x,h)\right]^2}{(\xi-x)^2+\left[\zeta^{(k)}(\xi,h)\right]^2}d\xi$, *ґенерує наступні наближення* $\zeta_1^{(k)}(x,h)=\sqrt{\left[\zeta^{(k)}(x,h)\right]^2+\Delta\zeta(x)}, k=0,1,2,3...$, *які ухилятимуться від точного розв'язку не більш, ніж на величину* $\zeta_0^2\left(h^+\right)^{-3}$, $\zeta_0=\max_x|\zeta(x)|$.

Доведення. Оскільки мова йде про лінеаризоване наближення розв'язку, то $\zeta(x)\in Nu^{(1,\alpha)}(1,D)$. Виходячи для цього класу з рівняння (1.10) з врахуванням відомих наближень (2.14), визначатимемо поправку Сенька $\zeta_1(x)=\zeta_0(x)+\Delta\zeta(x)$, вважаючи $\zeta(x)$ відомим з рівняння

$$\zeta(x)=h+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{(\xi-x)^2+\zeta^2(\xi)}{(\xi-x)^2+h^2}d\xi .$$

Для цього обчислимо різницю $\delta\zeta(x)=\zeta(x)-\left\{h+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{(\xi-x)^2+\zeta^2(\xi)}{(\xi-x)^2+h^2}d\xi\right\}$ і складемо інтегральне подання вигляду [94, 146]:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{(\xi-x)^2+\zeta_1^2(x)}{(\xi-x)^2+h^2}d\xi-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{(\xi-x)^2+\zeta_0^2(x)}{(\xi-x)^2+h^2}d\xi=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\left[1+\frac{\Delta\zeta(\xi)}{\zeta_0^2(\xi)+(\xi-x)^2}\right]d\xi .$$

У загальному випадку для деякого *k*-го наближення матимемо

$$\zeta^{(k)}(x,h)-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{(\xi-x)^2+\left[\zeta^{(k)}(x,h)\right]^2}{(\xi-x)^2+\zeta^2(\xi)}d\xi=u(x).$$

Врахуймо надалі, що функція $v(x)=u(x)-\zeta^{(k)}(x,h)+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{(\xi-x)^2+\left[\zeta^{(k)}(x,h)\right]^2}{(\xi-x)^2+\left[\zeta^{(k)}(\xi,h)\right]^2}d\xi$ не дорівнює тотожньо нулю, оскільки наближення $\zeta^{(k)}(x,h), k=0,1,2,3$, вочевидь, не є розв'язками рівняння (1.10). Звідси отримуємо відношення

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{(\xi-x)^2+\zeta^2(\xi)}{(\xi-x)^2+\left[\zeta^{(k)}(\xi,h)\right]^2}d\xi=v(x),$$

яке з допомогою заміни $\zeta^2(x)=\left[\zeta^{(k)}(x,h)\right]^2+\Delta\zeta(x)$ можна подати у вигляді

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\Delta\zeta(\xi)}{\left[\zeta^{(k)}(\xi,h)\right]^2+(\xi-x)^2}\right)^k d\xi=v(x),$$

оскільки на класі $Nu^{(1,\alpha)}(1,D)$ завжди матиме місце нерівність $\Delta\zeta_0<\left[\zeta^{(k)}(x,h)\right]^2$. За цієї умови маємо $\delta\zeta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Delta\zeta(\xi)}{\zeta^2(\xi)+(\xi-x)^2}d\xi$, звідки, ясна річ, випливає, що $\zeta_1^2(x)=\zeta_0^2(x)+\Delta\zeta(x)$; те ж саме отримаємо з попереднього виразу при $n=1$. Оцінку відкинутих членів розкладу в ряд Лейбніца знаходимо з виразу [15]

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\Delta\zeta(\xi)}{\left[\zeta^{(k)}(\xi,h)\right]^2+(\xi-x)^2}\right)^2 d\xi\le\frac{\Delta\zeta_0^2}{\left(h^+\right)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{\pi\Delta\zeta_0^2}{2\left(h^+\right)^3},\quad \Delta\zeta_0=\max_x\left|\Delta\zeta(x)\right|,$$

що й завершує доведення теореми. ■

***Зауваження* 2.5**. Обидва вищезгадані способи уточнень лінеаризованих наближень розв’язку задачі для контакту передбачають вирішення додаткового лінійного інтегрального рівняння 1-го роду. У першому способі за допомогою розв’язку такого рівняння знаходимо аналітично продовжені в сторону мас значення заданої на осі гармонічної функції, а в другому – безпосередньо потрібну поправку з рівняння 1-го роду. Ясна річ, у цьому контексті обидва способи уточнень еквівалентні.

Розгляньмо нарешті третій спосіб уточнення лінеаризованого наближення контакту (надалі ЛНК), названий нами способом Нумерова-Маловичка.

2.2.4. Спосіб Нумерова-Маловичка. Його збудовано на основі залежностей (1.10) та (2.1_1)[35]. Перша з них є точним, а інша – наближеним зв’язком між полем $u(x)$ та контактом $\zeta(x), x\in R^{(1)}$. Скористаймось цією обставиною для побудови послідовних наближень $\zeta_n(x,h)$, $n=\overline{0,\infty}$ контакту. Нехай $u_0(x)$ – та частина напруженості поля $u(x)$, якій відповідає функція $\zeta_0(x,h)$, знайдена в результаті розв’язання рівняння

$$u(x)=\zeta_0(x)+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}\zeta(\xi,x)d\xi=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}\zeta_0(\xi)d\xi, \qquad (2.17)$$

в якому для спрощення позначено $\zeta_0(x)=\zeta_0(x,h)$, хоча і це і всі наступні наближення *фактично залежать від параметра* h. Підсумовуючи попередні способи обчислень $\zeta_i(x,h)$, отримаємо наступний алгоритм:

1) визначаємо функцію $\zeta_0(x), x\in R^{(1)}$ за допомогою ітерацій Лаврентьєва-Андреєва (2.4) чи обмежуємось одним із її наближень (2.14);

2) за її значенням знаходимо “нульове” значення поля

$$u_0(x)=\zeta_0(x)-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{(\xi-x)^2+\zeta_0^2(x)}{(\xi-x)^2+\zeta_0^2(\xi)}d\xi; \qquad (2.18)$$

---

35 Розв`язання останньої Маловичко [57] звів до вирішення системи лінійних алгебраїчних рівнянь. До речі, відповідні побудови справедливі і для узагальнених варіантів згаданих залежностей.

3) обчислюємо різницю $v_0(x)=u(x)-u_0(x), x\in R^{(1)}$;

4) знаходимо поправку $\Delta\zeta_0(x)$ до нульового наближення $\zeta_0(x)$;

5) визначивши граничну функцію $\Delta\zeta_0(x)=\lim\limits_{m\to\infty}\Delta\zeta_0^{(m)}(x)$ отримаємо перше наближення $\zeta_1(x)=\zeta_0(x)+\Delta\zeta_0(x),\ x\in R^{(1)}$ розв'язку нелінійного рівняння (1.10).

Поправку $\Delta\zeta_0(x)$ знайдемо шляхом вирішення лінійного інтегрального рівняння

$$v_0(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}\Delta\zeta_0(\xi)d\xi, \tag{2.19}$$

аналогічного рівнянню (2.17). Розв'язок $\Delta\zeta_0(\xi), x\in R^{(1)}$ шукатимемо як границю послідовності $\left\{\Delta\zeta_0^{(m)}(x)\right\}$, ґенерованої процесом Лаврентьєва-Андреєва (2.4), який стосовно нашого випадку матиме вигляд

$$\Delta\zeta_0^{(m+1)}(x)=v_0(x)-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}\Delta\zeta_0^{(m)}(\xi)d\xi+\Delta\zeta_0^{(m)}(x),\ \Delta\zeta_0^{(0)}(x)=v_0(x),\ m=\overline{0,\infty}. \tag{2.20}$$

Надалі за формулою, аналогічною (2.18), обчислимо ту частину $u_1(x)$ поля, якій відповідає функція $\zeta_1(x)$, а з неї – нову поправку.

Приймаючи втілену в формулах (2.18-2.20) процедуру за базис рекурсії, запишемо для обчислення послідовних наближень

$$\zeta_{n+1}(x)=\zeta_n(x)+\Delta\zeta_n(x),\quad \Delta\zeta_n(x)=\lim_{m\to\infty}\Delta\zeta_n^{(m)}(x)$$

контакту $\zeta(x)$ наступний ітераційний процес, названий *процесом Нумерова-Маловичка*:

$$\Delta\zeta_n^{(m+1)}(x)=u(x)-\zeta_n(x)+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{(\xi-x)^2+\zeta_n^2(x)}{(\xi-x)^2+\zeta_n^2(\xi)}d\xi-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}\Delta\zeta_n^{(m)}(\xi)d\xi+\Delta\zeta_n^{(m)}(x),$$

$$\Delta\zeta_n^{(0)}(x)=u(x)-\zeta_n(x)+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{(\xi-x)^2+\zeta_n^2(x)}{(\xi-x)^2+\zeta_n^2(\xi)}d\xi,\ n=\overline{0,\infty}, \tag{2.21}$$

$$\zeta_0(x)=\zeta^{(k)}(x,h),\ k=0,1,2,3...\ m=\overline{0,\infty},\ h^-\le h\le h^+.$$

Відзначмо мимохідь, що збудовані за схемою (2.21) розв'язки рівнянь для контактної поверхні не протирічать тотожності

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}\zeta(\xi)d\xi=u(x)-\zeta(x)+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{(\xi-x)^2+\zeta^2(x)}{(\xi-x)^2+\zeta^2(\xi)}d\xi+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}\zeta(\xi)d\xi,$$

еквівалентній, очевидно, рівнянню (1.4). Дійсно, при $m\to\infty$ з виразу (2.21) отримаємо

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}\Delta\zeta_n(\xi)d\xi=u(x)-\zeta_n(x)+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{(\xi-x)^2+\zeta_n^2(x)}{(\xi-x)^2+\zeta_n^2(\xi)}d\xi.$$

Звідси, приймаючи до уваги визначення $\Delta\zeta_n(x)=\zeta_{n+1}(x)-\zeta_n(x),\quad x\in R^{(1)}$, безпосередньо переконуємось у справедливості сказаного.

Проблему збіжності послідовних наближень (2.21) розкриває така теорема.

Теорема 2.1. *Якщо розв'язок* $\zeta(x),\ x\in R^{(1)}$ *нелінійного інтегрального рівняння для контактної границі належить до класу* $Nu^{(1,\alpha)}(1,D)$, *то послідовні наближення* $\zeta_{n+1}(x,h)=\zeta_n(x,h)+\Delta\zeta_n(x,h),\ h^-\le h\le h^+$, *ґенеровані ітераційним процесом Нумерова-*

Маловичка, збігаються при $n \to \infty$ до граничної функції $\zeta(x)$, незалежної від h, зі швидкістю геометричної прогресії.

Доведення. Умова $\zeta(x) \in Nu^{(1,\alpha)}(1,D)$ забезпечує нерівність $\left\|\Delta\zeta_0^{(0)}(x)\right\|_C < \left\|\zeta(x)\right\|_C$, яка дозволяє обчислити лінеаризоване наближення $\zeta_0(x,h)$, яке не дуже ухиляється від розв'язку $\zeta(x)$. А оскільки наступне наближення описується як

$\zeta_{n+1}(x,h) = \zeta_n(x,h) + \Delta\zeta_n(x,h),\ n = 0,1,2,...,$ то на передній план виступає питання про збіжність послідовності $\left\{\Delta\zeta_n^{(m)}(x,h)\right\}$ до граничної функції $\Delta\zeta_n(x,h)$. Згодом ми переконаємось, що дослідження граничного відношення

$$\Delta\zeta_n(x,h) = \lim_{m\to\infty} \Delta\zeta_n^{(m)}(x,h),\ h^- \le h \le h^+ \qquad (2.22)$$

еквівалентне доведенню збіжності процесу Лаврентьєва-Андреєва (2.4). Гранична функція $\Delta\zeta_n(x,h) \in Nu^{(1,\alpha)}(1,D)$ безумовно є розв'язком рівняння (2.21) як наслідок теорем існування і єдиності [94] розв'язку наближень $\Delta\zeta_m^{(0)}(x,h) \in St^{(1,\alpha)}(1,D)$

та *вкладання* $Nu^{(1,\alpha)}(1,D) \subset St^{(1,\alpha)}(1,D)$. Тому відкладемо до часу розгляд цього питання, вважаючи рівність (2.22) вірною й покажімо, що при цьому виконується умова $\zeta_n(x,h) \to \zeta(x)$

.

Виконання цієї умови еквівалентне вимозі $\Delta\zeta_n^{(0)}(x) \to 0$ при $n \to \infty$. Оскільки різниця сусідніх членів $\Delta\zeta_{n-1}^{(0)}(x) - \Delta\zeta_n^{(0)}(x) \cong \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta_{n-1}(\xi)}{\zeta_{n-1}^2(\xi) - (\xi - x)^2} \Delta\zeta_{n-1}^{(0)}(\xi) d\xi,$ то,

$\left|\Delta\zeta_n^{(0)}(x)\right| \le \left(1 - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h^-}{(h^+)^2 + (\xi - x)^2} d\xi\right) \left|\Delta\zeta_{n-1}^{(0)}(x)\right|$, тобто, справедливий ланцюжок

$$\left\|\Delta\zeta_n^{(0)}(x)\right\|_C \le \left(1 - \frac{h^-}{h^+}\right) \left\|\Delta\zeta_{n-1}^{(0)}(x)\right\|_C \le \left(1 - \frac{h^-}{h^=}\right) \left\|\Delta\zeta_{n-2}^{(0)}(x)\right\|_C \le \ldots \le \left(1 - \frac{h^-}{h^+}\right)^n \left\|\Delta\zeta_0^{(0)}(x)\right\|_C . \qquad (2.23)$$

Звідси випливає, що $\Delta\zeta_n^{(0)}(x) \to 0$ при $n \to 0$. Але при $m \to \infty$ за означенням (2.21)

маємо $\Delta\zeta_n^{(0)}(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h}{h^2 + (\xi - x)^2} \Delta\zeta_n(\xi) d\xi$, тому $\left\|\Delta\zeta_n(x)\right\|_C \to 0$ при $n \to \infty$. Завершуючи доведення, з огляду на нерівність (2.23) відзначмо, що ЛНК $\zeta_n(x,h)$ збігаються до розв'язку $\zeta(x)$ не повільніше від геометричної прогресії зі знаменником $q = 1 - h^-/h^+ < 1$. ■

Слід зауважити, що ітераційний процес (2.21) зображено як два вкладені один в один цикли, причому в кожному внутрішньому циклі шукають наближений розв'язок лінійного інтегрального рівняння (1.23_2) із правою частиною, що визначається у зовнішньому циклі. На кожному кроці зовнішнього циклу обчислюють із (1.4) таку редукцію поля, яка, з одного боку, *відповідає розв'язку лінійного рівняння в попередньому внутрішньому циклі*, а з іншого – *служить правою частиною аналогічного рівняння, що розв'язується в наступному внутрішньому циклі*. Через це швидкість збіжності послідовних наближень в цілому нерівномірна, що підтверджують чисельні приклади. Дійсно, у внутрішньому циклі вона оцінюється величиною

$c_0/(n+2)$, а в зовнішньому – величиною $c_1/(1-h^-/h^+)$, де c_0, c_1 – деякі константи, $h^- = \inf\zeta(x)$, $h^+ = \sup\zeta(x), x \in R^{(1)}, n$ – порядковий номер наближення.

Незважаючи на різноманіття індивідуальних характеристик, кожен із описаних вище способів отримання різних ЛНК по суті зводиться до розв`язання одного й того ж лінійного інтегрального рівняння Фредгольма 1-го роду з ядром Пуассона. Так, при обчисленні ЛНК за формулою (2.2) необхідно знати значення поля на деякому рівні $y = h > 0$, які в свою чергу слід отримати за допомогою аналітичного продовження в горизонтальну смугу через інтеграл Пуассона гравітаційного поля, заданого на осі $y = 0$. Якщо ж ЛНК задачі обчислювати безпосередньо з інтегрального рівняння (2.17), то вже з самого його вигляду можна дійти висновку, що ця і попередня задачі практично еквівалентні. Згодом переконаємось, що їм еквівалентна і задача обчислення кожного з ЛНК нелінійного рівняння (1.4) за ітераційним процесом Нумерова-Маловичка.

2.3. ВИЗНАЧЕННЯ КОНТАКТУ МЕТОДОМ ЛАВРЕНТЬЄВА-АНДРЕЄВА

На початку другого розділу для розв'язання рівняння (2.3) введено процес послідовних наближень Лаврентьєва-Андреєва (2.4), який витікає з тотожності

$$u(x,h)=u(x,0)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}u(\xi,h)d\xi+u(x,h),$$

очевидно, еквівалентної лінійному рівнянню (2.2). Перед нами постає коло питань, пов'язаних з коректністю розв'язку наближень (2.4), а саме:

1. збіжність послідовності $\{u_n(x,h)\}$ (існування розв'язку);
2. її збіжність саме до розв'язку рівняння (2.3) (єдиність розв'язку);
3. справедливість подання цим розв'язком значень гармонічної функції $u(x,y)$ на рівні $y=h$ за її значеннями на осі $y=0$ (стійкість розв'язку).

Вивчаючи питання розв'язаності лінійного інтегрального рівняння Фредгольма (2.3) чи еквівалентному йому (1.23$_2$), шукатимемо його розв'язок за рекомендаціями Б.О. Андреєва і М. М. Лаврентьєва у вигляді границі послідовності $\{\zeta_n(x,h)\}$, ґенерованої процесом Лаврентьєва-Андреєва:

$$\zeta_{n+1}(x,h)=u(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}\zeta_n(\xi,h)d\xi+\zeta_n(x,h),\ \zeta_0(x,h)=u(x),\ n=\overline{0,\infty}. \quad (2.24)$$

Аналіз цієї схеми проведемо в світлі публікації [88]; зауважмо, що оскільки має місце співвідношення [29, с. 45]

$$\max_{x\in R^{(1)}}\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}d\xi\right|=1,$$

то оператор рівняння (1.23$_2$) не є *стискаючим* в $Nu^{(1,\alpha)}(1,D)$. Ця обставина, як відомо [59], не дозволяє використати безпосередньо теорему Банаха для відшукання границі $\zeta(x,h)$ послідовності $\{\zeta_n(x,h)\}$, отриманої із процесу (2.24). Для доведення збіжності процесу (2.24) саме до функції $\zeta(x,h)$ розв'язку рівняння (1.23$_2$) подаймо послідовність (2.24) в зручнішому вигляді, для чого знадобиться допоміжна лема.

Лема 2.1. *Для цілих додатних чисел* k,m,n *справедливі наступні інтегральні тотожності*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{kh}{(kh)^2+x^2}dx=\pi,\ \int_0^{\infty}\cos\omega x\, e^{-k\omega h}d\omega=\frac{kh}{(kh)^2+x^2},\ h>0,\ \int_0^{\infty}\frac{kh}{(kh)^2+x^2}\cos\omega x dx=\frac{\pi}{2}e^{-k\omega h},\ \omega\ge 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{mh}{(mh)^2+(\xi-t)^2}\frac{nh}{(nh)^2+(t-x)^2}dt=\frac{\pi(m+n)h}{[(m+n)h]^2+(\xi-x)^2}.$$

Доведення. Перші дві тотожності очевидні внаслідок безпосереднього інтегрування, третя визначається на основі відношення Фур'є [32]

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\cos\omega x d\omega\int_0^{\infty}f(y)\cos\omega y dy,\quad x>0$$

для функції $f(x)=e^{-xh}$; щодо останньої тотожності, то її легко вивести з використанням другої і третьої тотожностей при $h>0$. Дійсно,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{mh}{(mh)^2+(\xi-t)^2}dt\int_0^{\infty}\cos\omega(t-x)e^{-n\omega h}d\omega=2\int_0^{\infty}e^{-n\omega h}\cos\omega(\xi-x)d\omega\int_0^{\infty}\frac{mh}{(mh)^2+u^2}\cos\omega u du=$$

$$=\pi\int_0^{\infty}\cos\omega(\xi-x)e^{-(m+n)\omega h}d\omega=\frac{\pi(m+n)h}{[(m+n)h]^2+(\xi-x)^2},$$

що нам й потрібно. ■

Окрім цих тотожностей в дослідженні наближень (2.24) істотну роль відіграє узагальнена дельта-функція Дірака [21], дію якої на функції з класу $Nu_2^{(1,\alpha)}(1,D)$ визначає такий ланцюжок співвідношень:

$$u(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(\xi)\delta(\xi-x)d\xi=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(\xi)d\xi\int_0^{\infty}\cos\omega(\xi-x)d\omega=$$

$$=\frac{1}{\pi}\lim_{h\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}u(\xi,h)d\xi\int_0^{\infty}\cos\omega(\xi-x)d\omega=\frac{1}{\pi}\lim_{h\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}u(\xi,h)d\xi= \qquad (2.25)$$

$$=\frac{1}{\pi}\lim_{h\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}u(\xi,h)d\xi\int_0^{\infty}\cos\omega(\xi-x)e^{-\omega h}d\omega=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(\xi,0)d\xi\int_0^{\infty}\cos\omega(\xi-x)d\omega.$$

Загалом відомо два способи доведення теорем існування розв’язку функціональних рівнянь – неконструктивний і конструктивний [55]. Перший не вказує на конкретний спосіб побудови оберненого оператора, а останній – вказує. Для його реалізації, як правило, будують відповідний збіжний ітераційний процес, границя якого є розв’язком рівняння. По доведенні існування (і єдиності) точного розв’язку рівняння його відшукують на основі ітерацій, які дозволяють отримати послідовність наближених розв’язків, що збігається до точного. Використаймо цей прийом для доведення існування (збіжності) процесу (2.24).

2.3.1. Еквівалентне подання ітерацій. Дослідження властивостей ітерацій і отриманих наближень має на увазі:

1. перевірку виконання умови $\lim\limits_{k\to\infty}\zeta^{(k)}=\bar{\zeta}$, $\delta=0$;
2. оцінку відстані між елементами наближеного і точного розв’язку ε;
3. оцінку порядку прагнення до нуля послідовності значень похибки.

Практичне застосування цих оцінок можливе, якщо вони не грубі. Для убезпечення збіжності ітерацій застосовують попереднє еквівалентне перетворення початкового рівняння. Ідучи цим шляхом, перепишімо вираз (2.24) у термінах тотожностей із леми 2.1 і формули (2.25). Має місце така лема.

Лема 2.2. *Якщо послідовність функцій $\{\zeta_n(x,h)\}$ ґенерована ітераційним процесом Лаврентьєва-Андреєва, то еквівалентна їй послідовність ґенерується за допомогою*

послідовних наближень

$$\zeta_n(x,h)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(\xi,0)d\xi\int_0^{\infty}\cos\omega(\xi-x)\sum_{k=0}^{n}\left(1-e^{-\omega h}\right)^k d\omega . \qquad (2.26)$$

***Зауваження* 2.5**. Цю лему можна перефразувати так: *ітераційні процеси* (2.24) *і* (2.26) *еквівалентні один одному.*

Доведення. Гадаємо, досить встановити взаємно-однозначну відповідність між наближеннями $\zeta_n(x,h)$, зображеними формулами (2.24), (2.26). Проведемо міркування методом математичної індукції. Перш за все для $n=0$ з виразів (2.24) і (2.25) отримуємо

$$\zeta_0(x,h)\equiv u(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(\xi,0)d\xi\int_0^{\infty}\cos\omega(\xi-x)d\omega .$$

Для $n=1$ на основі подання (2.24), означення (2.25) й леми 2.2 послідовно знаходимо

$$\zeta_1(x,h)=u(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}\zeta_0(\xi,h)d\xi+\zeta_0(x,h)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(\xi)d\xi\int_0^{\infty}\cos\omega(\xi-x)d\xi-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(\xi)d\xi\int_0^{\infty}\cos\omega(\xi-x)d\omega\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+u^2}\cdot\cos\omega u du+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(\xi)d\xi\int_0^{\infty}\cos\omega(\xi-x)d\xi=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(\xi)d\xi\int_0^{\infty}\cos\omega(\xi-x)\left(1+\left(1-e^{-\omega h}\right)\right)d\omega .$$

Аналогічно для $n=2$ маємо $\zeta_2(x,h)=u(x)-$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}\zeta_1(\xi,h)d\xi+\zeta_1(x,h)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(\xi)d\xi\int_0^{\infty}\cos\omega(\xi-x)\left(1+\left(1-e^{-\omega h}\right)+\left(1-e^{-\omega h}\right)^2\right)d\omega .$$

Приймаючи наближення $\zeta_0(x,h)$, $\zeta_1(x,h)$ і $\zeta_2(x,h)$ за базис індукції, припустімо, що для будь-якого натурального n має місце відношення[8]

$$\zeta_n(x,h)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(\xi)d\xi\int_0^{\infty}\cos\omega(\xi-x)\sum_{k=0}^{n}\left(1-e^{-\omega h}\right)^k d\omega,$$

яке стверджується в лемі. У його справедливості для $n=0,1,2$ переконуємось безпосередньою перевіркою. Припустивши його вірність для будь-якого n, для $n+1$ на основі (2.24), (2.25) та леми 2.2 отримуємо

$$\zeta_{n+1}(x,h)=u(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}\zeta_n(\xi,h)d\xi+\zeta_n(x,h)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(\xi)d\xi\int_0^{\infty}\cos\omega(\xi-x)d\omega-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(\xi)d\xi\int_0^{\infty}\cos\omega(\xi-x)\sum_{k=0}^{n}\left(1-e^{-\omega h}\right)^k d\omega\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+u^2}\cos\omega u du$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(\xi)d\xi\int_0^{\infty}\cos\omega(\xi-x)\sum_{k=0}^{n}\left(1-e^{-\omega h}\right)^k d\omega=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(\xi)d\xi\int_0^{\infty}\cos\omega(\xi-x)\left[1+\sum_{k=0}^{n}\left(1-e^{-\omega h}\right)^{k+1}\right]d\omega .$$

Звідси, змінюючи індекс підсумування $k+1=m$, матимемо вираз

$$\zeta_{n+1}(x,h)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(\xi)d\xi\int_0^{\infty}\cos\omega(\xi-x)\sum_{m=0}^{n+1}\left(1-e^{-\omega h}\right)^m d\omega , \qquad (2.27)$$

---

[8] Це припущення математично строго доведено в [148].

аналогічний виразу (2.26), що і завершує першу частину доведення леми. Разом з тим, ствердження справедливості подання (2.26) містить само по собі й доказ другої частини леми стосовно того, що кожен член послідовності, ґенерованої процесом (2.26), подається через (2.24). Дійсно, із виразу (2.27) зворотнім ходом відносно його отримання знайдемо

$$\zeta_{n+1}(x,h)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(\xi)d\xi\int_{0}^{\infty}\cos\omega(\xi-x)d\xi+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(\xi)d\xi\int_{0}^{\infty}\cos\omega(\xi-x)\sum_{k=1}^{n+1}\left(1-e^{-\omega h}\right)^{k}d\omega=u(x)+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(\xi)d\xi\int_{0}^{\infty}\cos\omega(\xi-x)\left(1-e^{-\omega h}\right)\sum_{k=0}^{n}\left(1-e^{-\omega h}\right)d\omega=u(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^{2}+(\xi-x)^{2}}\zeta_{n}(\xi,h)d\xi+\zeta_{n}(x,h),$$

що й треба було довести. ■

***Зауваження* 2.6.** Ітераційний процес Нумерова-Маловичка (2.21) за індексом m є процесом Лаврентьєва-Андреєва; це очевидно з виразу

$$\Delta\zeta_{n}^{(m+1)}(x,h)=\Delta\zeta_{n}^{(0)}(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^{2}+(\xi-x)^{2}}\Delta\zeta_{n}^{(m)}(\xi,h)+\Delta\zeta_{n}^{(m)}(x,h),$$

де $\Delta\zeta_{n}^{(0)}(x)=u(x)-\zeta_{n}(x,h)+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{(\xi-x)^{2}+\zeta_{n}^{2}(x,h)}{(\xi-x)^{2}+\zeta_{n}^{2}(\xi,h)}d\xi$, $\zeta_{n}(x,h)=\zeta_{n-1}(x,h)+\Delta\zeta_{n-1}(x,h)$, $\Delta\zeta_{n-1}(x,h)=\lim_{m\to\infty}\Delta\zeta_{n}^{(m)}(x,h)$.

Згідно останньої леми послідовність $\left\{\Delta\zeta_{n}^{(m)}(x,h)\right\}$ можна подати у вигляді

$$\Delta\zeta_{n}^{(m)}(x,h)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Delta\zeta_{n}^{(0)}(\xi)d\xi\int_{0}^{\infty}\cos\omega(\xi-x)\sum_{k=0}^{m}\left(1-e^{-\omega h}\right)^{k}d\omega\,.$$

В такому зображенні дуже зручно досліджувати збіжність ітерацій, використовуючи мажорантні оцінки членів інтегральної суми від підінтегрального виразу.

По зроблених зауваженнях переходимо до дослідження збіжності послідовності $\left\{\Delta\zeta_{n}^{(m)}(x,h)\right\}$ до розв'язку рівняння (2.24).

2.3.2. Збіжність процесу. При доведенні рівномірної збіжності певного наближення використовують той факт, що для певного елемента послідовності $\{\zeta_{n}(x)\}$ вона еквівалентна збіжності наступного ряду

$$S(x)=\zeta_{1}(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\zeta_{n+1}(x)-\zeta_{n}(x)\right],$$

тому лишається отримати оцінки $|\zeta_{1}(x)|$ й $|\zeta_{n}(x)-\zeta_{n-1}(x)|$. Рівномірна збіжність ряду дозволяє перейти до границі при $n\to\infty$ в ітераційній схемі розв'язання рівняння 1-го роду. Питання збіжності ітераційного процесу Лаврентьєва-Андреєва розкриває наступна теорема, яка одночасно дає конкретний спосіб побудови оберненого відображення $A^{-1}(u;\xi)$.

Теорема 2.2. *Якщо послідовність функцій* $\{\zeta_{n}(x,h)\}$ *ґенерується ітераційним процесом Лаврентьєва-Андреєва, то вона збігається до граничної функції* $\zeta(x,h)$*, яка задовольняє інтегральному рівнянню* (1.23_{2})

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}\zeta(\xi,h)d\xi=u(x),\quad h^-\le h\le h^+,$$

із швидкістю геометричної прогресії, яка оцінюється нерівністю

$$\|\zeta_{n+1}(x,h)-\zeta_n(x,h)\|_C\le\frac{M(h)}{h(n+2)},\quad q=\frac{1}{h(n+2)}<1,\quad де\ M(h)=\max_{x\in R^{(1)}}|\zeta(x,h)|.$$

Доведення. Власне кажучи, це *теорема існування розв'язку* $\zeta(x,h)$ і для її доведення досить довести *збіжність ітерацій* та визначити її швидкість, а те, що функція $\zeta(x)$ з послідовності $\{\zeta_n(x)\}$ дійсно є розв'язком рівняння (1.23_2) – наслідок *теореми єдиності*. Задля встановлення збіжності послідовних наближень $\{\zeta_n(x,h)\}, n=\overline{0,\infty}$ обчислимо частинну суму

$$S_n(\omega,h)=\sum_{k=0}^{n}\left(1-e^{-\omega h}\right),$$

як суму геометричної прогресії із знаменником[9]

$$1-e^{-\omega h}<1,\ h>0,\ \omega\ge 0. \tag{2.28}$$

Матимемо $S_n(\omega,h)=\left(1-\left(1-e^{-\omega h}\right)^{n+1}\right)\cdot e^{\omega h}$, а з урахуванням нерівності (2.28) ще й граничне відношення: $\lim_{n\to\infty}S_n(\omega,h)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\left(1-e^{-\omega h}\right)^{n+1}\right)e^{\omega h}=e^{\omega h}$. Це означає, що

$$\lim_{n\to\infty}\zeta_n(x,h)=\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}u(\xi)d\xi\int_0^{\infty}\cos\omega(\xi-x)S_n(\omega,h)d\omega=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(\xi)d\xi\int_0^{\infty}\cos\omega(\xi-x)e^{\omega h}d\omega.$$

Іншими словами, ми довели, що послідовність $\{\zeta_n(x,h)\}$, ґенерована процесом Лаврентьєва-Андреєва, збігається до функції

$$\tilde{\zeta}(x,h)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(\xi)d\xi\int_0^{\infty}\cos\omega(\xi-x)e^{\omega h}d\omega. \tag{2.29}$$

Покажімо тепер, що гранична функція $\tilde{\zeta}(x,h)$ обмежена і співпадає із шуканою $\zeta(x,h)$. З цією метою помножмо ліву й праву частини рівності (2.29) на нормоване ядро Пуассона і отриманий вираз проінтегруймо по всій осі; посилаючись на лему 2.2, матимемо

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)}\tilde{\zeta}(\xi,h)d\xi=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(\xi)d\xi\int_0^{\infty}\cos\omega(\xi-x)e^{\omega h}d\omega\cdot\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{h}{h^2+u^2}\cos\omega u du=u(x).$$

Звідси, внаслідок єдиності подання обмеженої функції $U(x)$ інтегралом Пуассона (зауваження 1.7, с. 32), одразу отримуємо тотожне співпадіння граничної функції $\tilde{\zeta}(x,h)$ з розв'язком $\zeta(x,h)$ заданого лінійного інтегрального рівняння, а, отже, рівність (2.29) зображує цей розв'язок. Тотожність $\tilde{\zeta}(x,h)\equiv\zeta(x,h)$ одночасно вирішує питання й про обмеженість границі (2.29). Висновком першої частини теореми є тотожність граничної функції (2.29) з шуканою $\zeta(x,h)$ й збіжність послідовності (2.24) до границі $\zeta(x,h)$.

Для доведення другої частини теореми обчислимо швидкість збіжності процесу послідовних наближень. На основі леми 2.2 отримуємо

---

[9] Тут задіяно *нове* в практиці доведення збіжності перетворення Фур`є *узагальнених функцій* із класу $Nu_2^{(1,\alpha)}(1,D)$.

$$\zeta_{n+1}(x,h)-\zeta(x,h)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(\xi)d\xi\int_{0}^{\infty}\cos\omega(\xi-x)\left(1-e^{\omega h}\right)^{n+1}d\omega .$$

Звідси після елементарних перетворень з врахуванням подання $\zeta(x,h)$ у вигляді (2.29) та нерівності Коші-Буняковського визначаємо

$$\left\|\zeta_{n+1}(x,h)-\zeta_n(x,h)\right\|_C=\frac{1}{\pi}\max_x\left|\int_{-\infty}^{\infty}u(\xi)d\xi\int_{0}^{\infty}\cos\omega(\xi-x)\left(1-e^{-\omega h}\right)^{n+1}e^{\omega h}\,e^{-\omega h}d\omega\right|\le$$

$$\le\frac{1}{\pi}\max_x\left|\int_{-\infty}^{\infty}u(\xi)d\xi\int_{0}^{\infty}\cos\omega(\xi-x)e^{\omega h}d\omega\right|\left|\int_{0}^{\infty}\left(1-e^{-\omega h}\right)^{n+1}e^{-\omega h}d\omega\right|=\frac{M(h)}{h(n+2)},$$

де $M(h)=\max_x|\zeta(x,h)|$, оскільки перший модуль дорівнює $|\zeta(x,h)|$,згідно першої частини теореми, а другий – дорівнює одиниці, згідно [81, с. 19]. ■

Зауважмо, що з цієї оцінки швидкості збіжності послідовних наближень Лаврентьєва-Андреєва витікає, що процес збігається тим швидше чим більша величина $M(h)$ обчислюваної функції $\zeta(x,h)$ і менша глибина h перерахунку та номер ітерації n, і, навпаки, зі збільшенням глибини h і номеру ітерації швидкість збіжності спадає. На практиці для оцінки швидкості збіжності послідовних наближень (2.24) за сталу $M(h)$ варто взяти її оцінку[10] $M(h)\approx\max_x|\zeta_n(x,h)|$.

***Зауваження* 2.7.** При доведенні теореми 2.1 (с. 70) ми опустили доведення того факту, що *послідовність* $\left\{\Delta\zeta_n^{(m)}(x,h)\right\}$, *породжена за фіксованого n процесом*

Нумерова-Маловичка виду

$$\Delta\zeta_n^{(m+1)}(x,h)=\Delta\zeta_n^{(m)}(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}\Delta\zeta_n^{(m)}(\xi,h)d\xi+\Delta\zeta_n^{(m)}(x,h),$$

збігається при $m\to\infty$ *до граничної функції* $\Delta\zeta_n(x,h)$, *яка задовольняє рівнянню*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}\Delta\zeta_n(\xi,h)d\xi=\Delta\zeta_n^{(0)}(x,h).$$

По-суті, маємо довести справедливість граничного переходу (2.22). Зважаючи на те, що $\Delta\zeta_n(x,h)\in Nu^{(1,\alpha)}(1,D)$ та оглядаючись на теорему 2.2 і *зауваження* 2.6, приходимо до висновку про самоочевидність цього припущення, що зайвий раз верифікує теорему 2.1. Більше того, згадуючи про трактовку визначення контакту як аналітичного продовження значень поля $u(x,h)$ за Рейнбоєм, міркуємо, що останнє зауваження одночасно доводить і граничну рівність (2.9). Додаймо умову, що наближення $\Delta\zeta_n^{(m)}(x,h)$ прагне до функції $\Delta\zeta_n(x,h)$ за індексом m зі швидкістю

$$\left\|\Delta\zeta_n^{(m+1)}(x,h)-\Delta\zeta_n^{(m)}(x,h)\right\|_C\le\frac{N(h)}{h(m+2)},\ \text{ де } N(h)=\max_{x\in R^{(1)}}|\Delta\zeta_n(x,h)|.$$

Завершуючи дослідження ітераційного процесу (2.24), підкреслимо, що швидкість збіжності процесу не дуже велика і зменшується з ростом глибини h та номера ітерації.

---

[10] Про визначення практичних границь ітерації, в яких процес зберігатиме збіжність, йтиметься в четвертому розділі.

2.4. Визначення контакту узагальненим методом з ядром Пуассона

Зосередьмо свою увагу на розв'язанні лінійного інтегрального рівняння (1.23_1), розв'язок якого, на відміну від розв'язку рівняння (1.23_2), не залежить від штучно введеного параметру h. Його розв'язок шукатимемо у вигляді границі послідовності $\{\zeta_n(x)\}$, ґенерованої процесом

$$\zeta_{n+1}(x) = v(x) - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta_n(x)}{(\xi - x)^2 + \zeta_n^2(x)} \zeta_n(\xi, x) d\xi + \zeta_n(x),\ \zeta_0(x) = v(x),\ n = \overline{0, \infty}, \quad (2.30)$$

який надалі називатимемо *узагальненим ітераційним процесом Лаврентьєва-Андреєва*. Для доведення його збіжності до шуканого розв'язку рівняння (1.23_1) нам знадобиться така допоміжна лема.

Лема 2.3. *Для цілих додатних чисел k, m, n справедливі інтегральні тотожності*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k\zeta(x)}{(k\zeta(x))^2 + (\xi - x)^2} d\xi = 1,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{m\zeta(x)}{(m\zeta(x))^2 + (\xi - t)^2} \cdot \frac{n\zeta(x)}{(n\zeta(x))^2 + (t - x)^2} dt = \frac{\pi(m+n)\zeta(x)}{[(m+n)\zeta(x)]^2 + (\xi - x)^2}$$

$$\int_0^{\infty} \cos\omega x\, e^{-k\omega\zeta(x)} d\omega = \frac{k\zeta(x)}{(k\zeta(x))^2 + x^2},\ \lim_{y \to x}\int_0^{\infty} \frac{k\zeta(x)}{(k\zeta(x))^2 + x^2} \cos\omega x dx = \frac{\pi}{2} e^{-k\omega\zeta(x)},\ \omega > 0.$$

Схема доведення аналогічна до леми 2.1. ■

2.4.1. Еквівалентне подання ітерацій. Користуючись усталеною методикою, подаймо, завдяки лемі 2.3, узагальнений ітераційний процес (2.30) у еквівалентному вигляді, зручнішому для обчислень. Остаточний результат можна сформулювати через наступне твердження.

Лема 2.4. *Якщо послідовність функцій $\{\zeta_n(x)\}$ виробляється узагальненим процесом Лаврентьєва-Андреєва, то еквівалентну їй послідовність породжують послідовні наближення*

$$\zeta_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} v(\xi) d\xi \int_0^{\infty} \cos\omega(\xi - x)\left(1 + \sum_{i=1}^{n}\prod_{j=n-i}^{n-1}\left(1 - e^{-\omega\zeta_j(x)}\right)\right) d\omega. \quad (2.31)$$

Доведення. Як і при доведенні леми 2.2, встановимо взаємно-однозначну відповідність між наближеннями $\zeta_n(x)$, зображеними в (2.30) і (2.31), провадячи міркування за індукцією за індексом n. Допустимо, що формула (2.31) вірна для деякого значення n; тоді для $n+1$, згідно подання (2.30) та леми 2.4, отримуємо

$$\zeta_{n+1}(x) = v(x) - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta_n(x)}{(\xi - x)^2 + \zeta_n^2(x)} \zeta_n(\xi) d\xi + \zeta_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} v(t) dt \int_0^{\infty} \cos\omega(t - x) d\omega -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\zeta_n(x)}{(\xi-x)^2+\zeta_n^2(x)}d\xi\cdot\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}v(t)dt\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cos\omega(t-\xi)\left(1+\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=n-i}^{n-1}\left(1-e^{-\omega\zeta_j(x)}\right)\right)d\omega+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}v(t)dt\int\limits_{0}^{\infty}\cos\omega(t-x)\left(1+\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=n-i}^{n-1}(1-e^{-\omega\zeta_j(x)}\right)d\omega=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}v(t)dt\int\limits_{0}^{\infty}\cos(t-x)\left[1-\left(1+\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=n-i}^{n-1}\left(1-e^{-\omega\zeta_j(x)}\right)\right)e^{-\omega\zeta_n(x)}+\left(1+\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=n-i}^{n-1}\left(1-e^{-\omega\zeta_j(x)}\right)\right)\right]d\omega=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}v(\xi)d\xi\int\limits_{0}^{\infty}\cos\omega(\xi-x)\left(1+\sum_{i=1}^{n+1}\prod_{j=n+1-i}^{n}\left(1-e^{-\omega\zeta_j(x)}\right)\right)d\omega,$$

тобто той же вираз (2.31). Цей ланцюжок отримано на основі співвідношення $\zeta_{n+1}(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\zeta_n(\xi)d\xi\int\limits_{0}^{\infty}\left(1-e^{-\omega\zeta_n(\xi)}\right)\cos\omega(\xi-x)d\omega$, виведеного при використанні очевидних допоміжних залежностей [29]

$$\zeta(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\zeta(\xi)d\xi\int\limits_{0}^{\infty}\cos\omega(\xi-x)d\omega,\ \int\limits_{0}^{\infty}e^{-\omega\zeta_n(\xi)}\cos\omega(\xi-x)d\omega=\frac{\zeta_n(\xi)}{(\xi-x)^2+\zeta_n^2(\xi)},\ \zeta_n(\xi)>0.$$

Підставляючи згадане співвідношення саме в себе, після нескладних, але громіздких перетворень дійдемо до проміжного результату [94, с. 58]

$$\zeta_{n+1}(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\zeta_{n-1}(\xi)d\xi\int\limits_{0}^{\infty}\prod_{i=j-1}^{n}\left(1-e^{-\omega\zeta_i(\xi)}\right)\cos\omega(\xi-x)d\omega,$$

звідки за індукцією отримуємо потрібний вираз. Лишається переконатись, що подання (2.31) вірне для певних n. Так, при $n=0$ маємо

$$\zeta_0(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}v(\xi)d\xi\int\limits_{0}^{\infty}\cos\omega(\xi-x)d\omega\equiv v(x),$$

а для $n=1$ – $\quad\zeta_1(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}v(\xi)d\xi\int\limits_{0}^{\infty}\cos\omega(\xi-x)\left(1+\left(1-e^{-\omega\zeta_0(x)}\right)\right)d\omega=$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}v(\xi)d\xi\int\limits_{0}^{\infty}\cos\omega(\xi-x)d\omega-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}v(\xi)d\xi\int\limits_{0}^{\infty}\cos\omega(\xi-x)e^{-\omega\zeta(x)}d\omega+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}v(\xi)d\xi\int\limits_{0}^{\infty}\cos\omega(\xi-x)d\omega=v(x)-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\zeta_0(x)}{(\xi-x)^2+\zeta_0^2(x)}\zeta_0(\xi)d\xi+\zeta_0(x).$$

Звідси випливає справедливість подання (2.31). Подальший хід доведення аналогічний схемі, використаній в лемі 2.2. ■

Надалі потрібно переконатись в збіжності цього процесу. Будемо послуговуватись при цьому схемою, апробованою на ітераційному процесі (2.24).

2.4.2. Збіжність процесу. Його повністю розкриває така теорема.

Теорема 2.3. *Якщо послідовність функцій* $\{\zeta_n(x)\}$ *ґенерується узагальненим процесом Лаврентьєва-Андреєва* (2.30)*, то вона збігається до граничної функції* $\zeta(x)$*, яка*

задовольняє інтегральному рівнянню (1.23_1)

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\zeta(x)}{(\xi-x)^2+\zeta^2(x)}\zeta(\xi,x)d\xi=v(x),$$

зі швидкістю геометричної прогресії, що оцінюється нерівністю

$$\|\zeta_{n+1}(x)-\zeta_n(x)\|_C\le\frac{h^+}{h^-(n+2)},\ де\ h^-=\min_{x\in R^{(1)}}(x),\ h^+=\max_{x\in R^{(1)}}(x).$$

Доведення. Користуючись апробованою вище схемою, встановімо спочатку збіжність послідовних наближень $\zeta_n(x)$, $n=0,1,2,\ldots,$. З наведеного еквівалентного подання переконуємось, що для даного ітераційного процесу справедливе подання $\bar{\zeta}=\lim\limits_{n\to\infty}\zeta_{n+1}(x)=v(x)+\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)$, де $S_n(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}\zeta_i(x)$ – частинний ряд, збіжність якого означає і збіжність (2.31) до точного розв'язку $\bar{\zeta}(x)$. Задля цього мусимо оцінити частинну суму

$$S_n(\omega,x)=1+\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=n-i}^{n-1}\left(1-e^{-\omega\zeta_j(x)}\right)$$

для будь-якого значення $x\in R^{(1)}$, збудовану з використанням перетворень Фур'є від функції $\zeta_0(\xi)$. Визначмо величини h_x^- та h_x^+ через

$$h_x^-=\inf_j\{\zeta_j(x)\},\ h_x^+=\sup_j\{\zeta_j(x)\},\ h^-\le h_x^-\le h_x^+\le h^+,$$

тоді для будь-яких значень $x\in R^{(1)}$ й $0\le j\le n$ матимемо нерівності

$$1-e^{-\omega h^-}<1-e^{-\omega\zeta_j(x)}<1-e^{-\omega h^+}<1, \tag{2.32}$$

а для будь-якого фіксованого значення $x\in R^{(1)}$, $0\le j\le n$ – відношення

$$1-e^{-\omega h_x^-}<1-e^{-\omega\zeta_j(x)}<1-e^{-\omega h_x^+}. \tag{2.33}$$

З нерівностей (2.32) випливає, що частинна сума $S_n(\omega,x)$ обмежена знизу і зверху, тобто $\sum\limits_{k=0}^{n}\left(1-e^{-\omega h^-}\right)^k\le S_n(\omega,x)\le\sum\limits_{k=0}^{n}\left(1-e^{-\omega h^+}\right)^k$, причому, оскільки маємо справу зі спадаючими геометричними прогресіями, суми яких підкоряються умові

$$\sum_{k=0}^{n}\left(1-e^{-\omega h^\pm}\right)^k=\frac{1-\left(1-e^{-\omega h^\pm}\right)^{n+1}}{1-\left(1-e^{-\omega h^\pm}\right)}=\left[1-\left(1-e^{-\omega h}\right)^{n+1}\right]e^{\omega h}, \tag{2.34}$$

то $e^{\omega h^-}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\left(1-e^{-\omega h^-}\right)^k\le\lim\limits_{n\to\infty}S_n(\omega,x)\le\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\left(1-e^{-\omega h^+}\right)^k=e^{\omega h^+}$, бо $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-e^{-\omega h^\pm}\right)^{n+1}=0$.

Це означає, що границя $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(\omega,x)$ також обмежена. В свою чергу з нерівностей (2.33) очевидно, що обмежена послідовність $\{S_n(\omega,x)\}$ має в кожній точці $x\in R^{(1)}$ певну границю, що дорівнює, скажімо, $e^{\omega\zeta(x)}$. Дійсно, виходячи з нерівностей (2.33) і виразу (2.34), маємо, з одного боку,

$$\left[1-\left(1-e^{-\omega h_x^-}\right)^{n+1}\right]e^{\omega h_x^-}-e^{\omega\zeta(x)}=e^{\omega h_x^-}\left[1-e^{\omega\left(\zeta(x)h_x^-\right)}-\left(1-e^{-\omega h_x^-}\right)^{n+1}\right],$$

а з іншого $\left[1-\left(1-e^{-\omega h_x^+}\right)^{n+1}\right]e^{\omega h_x^+}-e^{\omega\zeta(x)}=e^{\omega h_x^+}\left[1-e^{\omega\left(\zeta(x)-h_x^+\right)}-\left(1-e^{-\omega h_x^+}\right)^{n+1}\right]$.

Покладімо $h_x^-=\zeta(x)-\varepsilon_1$, $\varepsilon_1>0$, та $h_x^+=\zeta(x)+\varepsilon_2$, $\varepsilon_2>0$, й оберімо $\varepsilon=\max(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$. Тоді,

очевидно, матимемо

$$e^{\omega(\zeta(x)-\varepsilon)}\left|1-e^{\omega\varepsilon}-\left(1-e^{[\omega(\zeta(x)-\varepsilon)}\right)^{n+1}\right|\le\left|S_n(\omega,x)-e^{\omega\zeta(x)}\right|\le e^{\omega(\zeta(x)+\varepsilon)}\left|1-e^{-\omega\varepsilon}-\left(1-e^{-\omega(\zeta(x)+\varepsilon)}\right)^{n+1}\right|,$$

в силу того, що справедливі співвідношення

$$S_{n+1}(\omega,x)-S_n(\omega,x)=1+\sum_{i=1}^{n+1}\prod_{j=n+1-i}^{n}\left(1-e^{-\omega\zeta_j(x)}\right)-1-\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=n-i}^{n-1}\left(1-e^{-\omega\zeta_j(x)}\right)=$$
$$=\left(1-e^{-\omega\zeta_n(x)}\right)S_n(\omega,x)-S_n(\omega,x)+1=1-e^{-\omega\zeta_n(x)}\,S_n(\omega,x),$$

а також враховуючи, що $1+\sum_{i=0}^{n-1}(f(x))^{n+1}\cong\sum_{i=0}^{n}(f(x))^n$ та

$$\left|1-e^{-\omega\zeta_n(x)}\,S_n(\omega,x)\right|\le\left|1-e^{-\omega h}\sum_{k=0}^{n}\left(1-e^{-\omega h^-}\right)^k\right|=\left|1-e^{-\omega h^-}\frac{1-\left(1-e^{-\omega h^-}\right)^{n+1}}{1-\left(1-e^{-\omega h^-}\right)}\right|=\left(1-e^{\omega h^-}\right)^{n+1},$$

що автоматично означає $\lim_{n\to\infty}S_n(\omega,x)=e^{\omega\zeta(x)}$. Отже, послідовність $\{\zeta_n(x)\}$ збігається до граничної функції $\tilde{\zeta}(x)=\lim_{n\to\infty}\zeta_n(x)=$

$$=\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}v(\xi)d\xi\int_0^{\infty}\cos\omega(\xi-x)S_n(\omega,x)d\omega=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}v(\xi)d\xi\int_0^{\infty}\cos\omega(\xi-x)e^{\omega\zeta(\xi)}d\omega.\qquad(2.35)$$

Доведімо, що гранична функція $\tilde{\zeta}(x)$ обмежена й співпадає з шуканою $\zeta(x)$, тобто задовольняє рівнянню (1.21). З цією метою помножмо ліву й праву частини наведеної вище рівності на функцію $\zeta(x)\big/\left[\pi\left((\xi-x)^2+\zeta^2(x)\right)\right]^{-1}$ й проінтегруймо результат по всій осі за умови, що значення $\zeta(x)$ в цій функції й $\zeta(\xi)$ в поданні (2.35) є, по суті, параметрами задачі, які легко обрати (однаковими!), наприклад, у вигляді $\lim_{y\to\xi}\zeta(y)$ й $\lim_{y\to x}\zeta(y)$. Врешті, посилаючись на лему 2.5, отримуємо

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\zeta(x)}{(\xi-x)^2+\zeta^2(\xi)}\tilde{\zeta}(x)dx=\frac{1}{\pi}\lim_{y\to\xi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\zeta(y)}{(\xi-x)^2+\zeta^2(y)}\tilde{\zeta}(x)dx=\frac{1}{\pi}\lim_{y\to x}\int_{-\infty}^{\infty}v(t)dt\int_0^{\infty}\cos\omega(t-\xi)e^{\omega\zeta(y)}d\omega\times$$
$$\times\frac{2}{\pi}\lim_{y\to\xi}\int_0^{\infty}\frac{\zeta(y)}{\zeta^2(y)+u^2}\cos\omega u\,du=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}v(t)dt\int_0^{\infty}\cos\omega(t-\xi)d\omega=v(\xi).$$

Звідси внаслідок єдиності подання обмеженої функції $u(\xi),\xi\in R^{(1)}$ інтегралом Пуассона, випливає, що гранична функція $\tilde{\zeta}(x)$ **тотожньо співпадає** з розв'язком $\zeta(x),x\in R^{(1)}$ заданого рівняння (1.23_1), а рівність (2.35) зображує цей розв'язок. У свою чергу це означає, що функція $\tilde{\zeta}(x)$ обмежена, що завершує першу частину теореми[11].

Для доведення другої її частини обчислимо швидкість збіжності процесу послідовних наближень. На основі леми 2.4 отримуємо

$$\zeta_{n+1}(x)-\zeta_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}v(t)dt\int_0^{\infty}\cos\omega(t-x)\left[S_{n+1}(\omega,x)-S_n(\omega,x)\right]d\omega=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}v(t)dt\int_0^{\infty}\cos\omega(t-x)\left[1-e^{[\omega\zeta_n(x)}\,S_n(\omega,x)\right]d\omega.$$

---

[11] Доведення теорем 2.2 і 2.3 однотипне, але при його узагальненні зникає конкретний геофізичний зміст.

Звідси з урахуванням оцінок (2.32) і нерівності Коші-Буняковського визначаємо, що норма різниці сусідніх значень ітерації обмежена

$$\left\|\zeta_{n+1}(x)-\zeta_n(x)\right\|_C = \frac{1}{\pi}\max_x\left|\int_{-\infty}^{\infty} v(t)dt\int_0^{\infty}\cos\omega(t-x)\left[1-e^{-\omega\zeta_n(x)}S_n(\omega,x)\right]d\omega\right| \le$$

$$\le \frac{1}{\pi}\max_x\left|\int_{-\infty}^{\infty} v(t)dt\int_0^{\infty}\cos\omega(t-x)e^{-\omega h^-}d\omega\right|\cdot\left|\int_0^{\infty}\left(1-e^{-\omega h^-}\right)^{n+1}e^{-\omega h^-}d\omega\right| \le \frac{h^+}{h^-(n+2)},$$

що й доводить повністю теорему. ■

***Зауваження* 2.8**. Наслідком теореми 2.3 є те, що модуль неперервності оберненого оператора рівняння (1.23$_1$) оцінюється нерівністю $\left|\zeta(x)-\zeta_n(x)\right| \le \dfrac{N(h_0)}{h_0(n+2)}$, де $N(h_0)=2\max\left|v(x,2h_0)\right|$, $h_0=\max\limits_x\{\zeta_n(x)\}$, $x\in R^{(1)}$, а $v(x,2h_0)$ – аналітично продовжена з рівня $y=0$ на рівень $y=2h_0$ функція $v(x)$.

Доведення очевидне з врахуванням оцінки $\left\|\zeta_{n+1}(x)-\zeta_n(x)\right\|_C$. ■

***Зауваження* 2.9**. Обчислення контакту $\zeta(x)$ за методом (2.30) завжди наближене через похибки квадратур і скінченність границь інтегрування. Для адитивної моделі похибки оператора $A_\varepsilon = A+\varepsilon E$ процес (2.30) в операторному вигляді, очевидно, зобразиться як $\zeta_{n+1}(x)=\zeta_n(x)-A_\varepsilon\,\zeta_n(x)+u(x)$. Нескладний ланцюжок перетворень [32, с. 267] виробляє наступну оцінку $\left\|\delta\zeta_n(x)\right\|_{L_2}^{\varepsilon} \le \left[\varepsilon+e^{-1}/(n+1)\right]\left\|A^{-1}\,\bar{\zeta}(x)\right\|_{L_2}$ його точності тоді як "точний" розв'язок має оцінку $\left\|\delta u_n(x)\right\|_{L_2} \le \left[e^{-1}/(n+1)\right]\left\|\bar{\zeta}(x)\right\|_{L_2}$. Очевидно, що з наближеним оператором A_ε точне значення $\bar{\zeta}(x)$ недосяжне, тому по досягненні заданої точності чи кількості кроків ітераційний процес (2.30) слід обірвати.

Для практичної реалізації розроблених алгоритмів потрібно знати значення поля сили тяжіння $v(x)$, $x\in R^{(1)}$ на майже "*нескінченних*" інтервалах; в геологічній практиці, як правило, профіль вимірів короткий, тому в розпорядженні дослідника немає даних такого класу. Через цю обставину бажано створити такий алгоритм визначення наближень контакту, в якому було б усунуто вказаний недолік (наступний розділ присвячено розгляду саме цього питання). Якщо ж залишатись у рамках алгоритмів (2.24), (2.30) то очевидною стає необхідність збільшення інтервалу задання вихідної функції для побудови швидкозбіжних ітерацій на основі процесів Лаврентьєва-Андреєва. У зв`язку з цим звернімо увагу на ще одну проблему.

2.5. Про екстраполяцію значень поля. Згідно першого варіанту альтернативи (див. с. 30), слід виконати попередню екстраполяцію значень поля $v(x)$ на відповідної довжини профіль. В рамках трансформації потенціальних полів розроблено багато відповідних алгоритмів [6, 29, 32, 80, 154, 162], та наразі можна запропонувати значно простішу в

чисельному аспекті схему екстраполяції значень поля за межі профілю. Цю задачу теж можна звести до відповідного інтегрального рівняння. Наведімо відповідні міркування. Нехай задано значення $v(x,0)$, $x \in R^{(1)}$ і деякої *гармонічної* в напівплощині $z < h^{+}$ функції $v(x,z)$, а їх пов'язує інтеграл Пуассона. Невідому функцію $v(x,h)$ визначмо з ряду Тейлора

$$v(x,h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2h)^k}{k!} \frac{\partial^k v(x,-h)}{\partial z^k}, \quad \frac{\partial^k v(x,-h)}{\partial z^k} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v(\xi,0) \frac{\partial^k}{\partial z^k} \left[\frac{h-z}{(h-z)^2 + (\xi - x)^2} \right] d\xi \Bigg|_{z=-h} . \quad (2.36)$$

Підставивши в інтеграл Пуассона розклад (2.36), отримаємо потрібне рівняння для визначення недостаючих значень $v(x,0)$. Для цього знадобиться допоміжна лема.

Лема 2.5. *Для будь-якого* $k = 0,1,2,\ldots$, *мають місце співвідношення*

$$\frac{\partial^{2k}}{\partial z^{2k}} \frac{h-z}{(h-z)^2 + x^2} = (-1)^k \frac{(2k)!}{2i} \left\{ \frac{1}{[x - i(h-z)]^{2k+1}} - \frac{1}{[x + i(h-z)]^{2k+1}} \right\},$$

$$\frac{\partial^{2k+1}}{\partial z^{2k+1}} \frac{h-z}{x^2 + (h-z)^2} = (-1)^{k+1} \frac{(2k+1)!}{2} \left\{ \frac{1}{[x - i(h-z)]^{2k+2}} - \frac{1}{[x + i(h-z)]^{2k+2}} \right\}.$$

Доведення. Проведемо його за індукцією за індексом k. Нехай ці вирази вірні для деякого k ; тоді для $k+1$ маємо

$$\frac{\partial^{2k+2}}{\partial z^{2k+2}} \frac{h-z}{x^2 + (h-z)^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial^{2k+2}}{\partial z^{2k+2}} \frac{h-z}{x^2 + (h-z)^2} \right] = (-1)^{k+1} \frac{(2k+2)!}{2i} \left\{ \frac{1}{[x - i(h-z)]^{2k+3}} - \frac{1}{[x + i(h-z)]^{2k+3}} \right\}$$

тобто формула диференціювання при $2k$ й $2k+2$ має однаковий вигляд; те ж саме справедливо для $2k+1$ й $2k+3$. Оскільки при $k = 0,1$ виходить

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{h-z}{x^2 + (h-z)^2} = \frac{(h-z)^2 - x^2}{\left[x^2 + (h-z)^2\right]^2} = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{[x + i(h-z)]^2} + \frac{1}{[x + i(h-z)]^2} \right\},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{h-z}{x^2 + (h-z)^2} = -\frac{2(h-z)\left[3x^2 - (h-z)^2\right]}{\left[x^2 + (h-z)^2\right]^3} = -\frac{2!}{2i} \left\{ \frac{1}{[x - i(h-z)]^3} - \frac{1}{[x + i(h-z)]^3} \right\},$$

то це доводить лему. ■

Скориставшись цією лемою і заміною координат $\xi - x = r\cos\varphi$, $h - z = r\sin\varphi$, опишімо аналітичний вираз похідних при $z = -h$. Отже,

$$\frac{\partial^{2k} v(x,-h)}{\partial z^{2k}} = (-1)^k \frac{(2k)!}{\pi} \int_0^{\pi} v(x + h\,\mathrm{ctg}\varphi, 0) \frac{2i}{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}} \frac{e^{i(2k+1)\varphi} - e^{-i(2k+1)\varphi}}{2i} \frac{d\varphi}{r^{2k}},$$

$$\frac{\partial^{2k+1} v(x,-h)}{\partial z^{2k+1}} = (-1)^{k+1} \frac{(2k+1)!}{\pi} \int_0^{\pi} v(x + h\,\mathrm{ctg}\varphi, 0) \frac{2i}{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}} \frac{e^{i(2k+2)\varphi} - e^{-i(2k+2)\varphi}}{2} \frac{d\varphi}{r^{2k+1}}, \; k = \overline{0,\infty}.$$

Підставивши ці значення в (2.36), маємо

$$v(x,h) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} v(x + h\,\mathrm{ctg}\varphi, 0) T(\varphi) d\varphi, \quad (2.37)$$

де, враховуючи заміну координат, що дає $2h = r\sin\varphi$ при $z = -h$, отримуємо

$$T(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left[\sin^{2k-1}\varphi \sin(2k+1)\varphi - \sin^{2k}\varphi \cos(2k+2)\varphi\right]. \quad (2.38)$$

Підставимо вираз (2.37) в інтеграл Пуассона виду (1.22), отримуємо

$$v(x,0)=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{(\xi-x)^2+h^2}\,d\xi\int_0^{\pi}v(\xi+h\,\mathrm{ctg}\varphi,0)T(\varphi)d\varphi,$$

а поклавши тут $\xi - x = r\cos\psi$, $h = r\sin\psi$, перейдемо до тотожності

$$v(x,0)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}d\psi\int_0^{\pi}v(x+h\,\mathrm{ctg}\psi+h\,\mathrm{ctg}\varphi,0)T(\varphi)d\varphi,$$

де $d\psi=\dfrac{r\sin\psi}{r^2(\cos^2\psi+\sin^2\psi)}\dfrac{rd\psi}{\sin\psi}=-\dfrac{h}{(\xi-x)^2+h^2}d\xi$, а функція $T(\varphi)$ обчислюється із (2.38). Для спрощення останнього виразу зауважмо, що функція $f(\psi,\varphi)=\mathrm{ctg}\psi+$ $+\mathrm{ctg}\varphi$ симетрична в квадраті $[0,\pi;0,\pi]$ відносно прямої $\varphi=\psi$, що дозволяє інтегрування в квадраті $[0,\pi;0,\pi]$ замінити інтегруванням в трикутнику виду $\{<\psi,\varphi>:0\le\psi\le\pi;0\le\varphi\le\pi;\varphi=\psi\}$, обмеженому лініями $\varphi=0$, $\psi=\pi$, $\varphi=\psi$. Отже,

$$v(x,0)=\frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi}d\psi\int_0^{\pi}v(x+h\,\mathrm{ctg}\psi+h\,\mathrm{ctg}\varphi,0)T(\varphi)d\varphi=$$

$$=\frac{2}{\pi^2}\int_0^{\pi}d\psi\int_0^{\alpha}v(x+h\,\mathrm{ctg}\psi+h\,\mathrm{ctg}\varphi,0)T(\varphi)d\varphi=\frac{2}{\pi^2}\int_0^{\pi}T(\varphi)d\varphi\int_0^{\pi}v(x+h\,\mathrm{ctg}\psi+h\,\mathrm{ctg}\varphi,0)d\psi\,.$$

Ввівши позначення $v(x,\psi,\varphi)=v(x+h\,\mathrm{ctg}\psi+h\,\mathrm{ctg}\varphi,0)$,

$$N(x,\varphi)=\int_{\varphi}^{\pi}u(x,\psi,\varphi)d\psi,\;\; T_0(\varphi)=\int_{\varphi}^{\pi}T(\varphi)d\varphi,$$

та інтегруючи частинами, отримаємо

$$v(x,0)=\frac{2}{\pi^2}\int_0^{\pi}N(x,\varphi)T(\varphi)d\varphi=\frac{2}{\pi^2}\left\{T_0(\varphi)N(x,\varphi)\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{\partial N(x,\varphi)}{\partial\varphi}T_0(\varphi)d\varphi\right\}=-\frac{2}{\pi^2}\int_0^{\pi}\frac{\partial N(x,\varphi)}{\partial\varphi}T_0(\varphi)d\varphi$$

оскільки $N(x,\pi)=N(x,0)=0$ внаслідок того, що $v(x,\psi,\pm\infty)\equiv 0$. В силу очевидного співвідношення

$$\frac{\partial N(x,\varphi)}{\partial\varphi}=\int_{\beta}^{\pi}\frac{\partial N(x,\psi,\varphi)}{\partial\varphi}d\psi-v(x,\psi,\varphi)$$

після нескладних перетворень дійдемо до спрощеної формули

$$\int_0^{\pi}v(x+2h\,\mathrm{ctg}\varphi,0)T_0(\varphi)d\varphi=0 \tag{2.39}$$

для екстраполяції (й інтерполяції також) функції $v(x,0)$. Відтак, процедуру інтерполяції здійснюють за такою схемою: якщо $v(x,0)$ задано на інтервалі $(0,\infty)$, то, позначивши (2.39) через

$$w(x)=-\int_0^{\psi}v(x+2h\,\mathrm{ctg}\varphi,0)T_0(\varphi)d\varphi,$$

де $\psi=\mathrm{arctg}\,2h/x$ – кут, під яким видно початок координат $(0,0)$ з точки $(x,2h)$, а $T_o(\varphi)$ – значення неозначеного інтегралу від виразу (2.38), отримуємо наступне рівняння

$$\int_{\psi}^{\pi}v(x+2h\,\mathrm{ctg}\varphi,0)T_0(\varphi)d\varphi=w(x),\;\;-\infty<x\le 0\,.$$

Розв'язок цього рівняння визначить значення функції $v(x,0)$ на проміжку $(-\infty,0)$. Вернувшись до початкових координат, в яких, очевидно,
$\psi = \arccos\dfrac{\xi - x}{r}$, $\varphi = \arcsin\dfrac{h-z}{r}$ й $\int\limits_{-\infty}^{\infty} v(\xi,0)\dfrac{2h}{(2h)^2+(\xi-x)^2}T_0\left(\operatorname{arctg}\dfrac{2h}{\xi-x}\right)d\xi = 0$, отримаємо остаточне рівняння

$$\int\limits_{-\infty}^{0} v(\xi,0)\frac{2h}{(2h)^2+(\xi-x)^2}T_o\left(\operatorname{arctg}\frac{2h}{\xi-x}\right)d\xi = w(x), \qquad (2.40)$$

де $w(x) = -\int\limits_{0}^{\infty} v(\xi,0)\dfrac{2h}{(2h)^2+(\xi-x)^2}T_0\left(\operatorname{arctg}\dfrac{2h}{\xi-x}\right)d\xi$.

Рівняння (2.40) очевидно є лінійним інтегральним рівнянням Фредгольма 1-го роду, подібно до рівняння контактної границі. Як відомо [51], таке рівняння на множині гармонічних функцій має єдиний розв'язок; вирішуватись воно має тими ж методами, що й рівняння (1.23_i).

Підсумовуючи основні положення цього розділу, пропонуємо для відновлення контакту за полем, заданим на майже необмежених множинах узагальненим рівнянням (1.23_i), таку методику:

1) екстраполяція виміряних значень поля на *майже нескінченний* профіль за допомогою послідовності розв'язків рівняння (2.40);

2) визначення контакту $\zeta(x) \in Nu^{(1,\alpha)}(1,D)$ з розв'язку рівняння (1.23_i) із точністю, узгодженою з точністю задання поля (під якою розуміємо сукупну точність вимірів та точність екстраполяції його дискретних значень).

По цьому переходимо до дослідження ітераційних процесів для відновлення контакту за полем, заданим на *істотно обмежених* профілях.

***Підсумки 2-го розділу*.** Другий розділ присвячено конструктивним способам розв'язання рівнянь для контакту з ядром Пуассона, виведених у першому розділі. Проаналізовано *спосіб Нумерова* (2.2) визначення наближень контакту методом ітерацій. Підвищити його точність пропонується на базі поліпшених чисельних способів Б.О. Андреєва (2.5), М.Р. Малкіна (2.15) і О.К. Сенька (2.16). Існування відповідних розв'язків на класі $Nu^{(1,\alpha)}(1,D)$ стверджується на теоремному рівні. Вияснено, що відомі в сфері аналітичних продовжень вирази Б.В. Нумерова (2.11), Д. Х'юза (2.12) і В.М. Страхова (2.13) є *частинними випадками формули Андреєва* (2.5). Запропоновано поліпшені чисельно стійкі їх варіанти (2.14), як засіб уточнень контактної границі $\zeta^{(n)}(x,h)$. На базі узагальнення методів (1.10) і (2.2) синтезовано новий спосіб уточнення наближень – так званий *спосіб Нумерова-Маловичка* (2.21), розв'язок якого, згідно теореми 2.1, існує на $Nu^{(1,\alpha)}(1,D)$.

Для розв'язання рівнянь ($1.23_{1,2}$) запропоновано відповідні ітераційні *процеси: Лаврентьєва-Андреєва* (2.24) та *узагальнений* аналог (2.30); існування розв'язків $\zeta(x)$, $x \in R^{(1)}$, згідно пропозиції В.П. Маслова трактується через збіжність ітерацій, декларованих теоремами 2.2 і 2.3. Дослідження збіжності цих процесів здійснено елементарними засобами завдяки їх еквівалентному поданню, відповідно, наближеннями (2.25) і (2.31)

на основі перетворень Фур'є від узагальнених функцій. Відзначено обернену пропорційність швидкості збіжності послідовних наближень до глибини *h* і індексу ітерації *n*.

Для надійного відновлення контактної границі за значеннями поля, заданими рівнянням (1.23_i) на майже нескінченних профілях, запропоновано попередньо здійснювати їх екстраполяцію за межі короткого профілю вимірювань за допомогою нового стійкого способу (2.40). Його отримано шляхом розкладу невідомих значень $v(x,h)$ з інтегралу Пуассона в ряд Тейлора (2.36). Така схема ґарантує задовільну точність обчислень контактної границі.

РОЗДІЛ 3
ВИЗНАЧЕННЯ КОНТАКТУ ЗА ПОЛЕМ, ЗАДАНИМ НА ІСТОТНО ОБМЕЖЕНИХ МНОЖИНАХ

Для визначення контактної границі за полем, заданим на істотно обмежених профілях, наведено ітераційні процеси розв'язання відповідних інтегральних рівнянь із швидкоспадним ядром Шварца. Охарактеризовано їх збіжність при допомозі еквівалентних перетворень й запропоновано схему прискорення збіжності ітерацій. Окреслено множину коректності на основі вивчення властивостей відповідних лінійних операторів.

У першому розділі описано кілька теоретично еквівалентних способів отримання лінеаризованого розв'язку оберненої задачі для контактної границі, які дають можливість будувати ефективні обчислювальні алгоритми для розв'язання задачі із вхідними даними на коротких відрізках осі, згідно другого варіанту альтернативи. Один з них базується на розв'язанні системи лінійних інтегральних *рівнянь Страхова* (1.30)

$$\frac{1}{2h}\int_{-\infty}^{\infty} S^{+}(\xi,h)\left(\operatorname{ch}\frac{\pi(\xi-x)}{2h}\right)^{-1} d\xi = v(x),\quad \frac{1}{2h}\int_{-\infty}^{\infty} S^{-}(\xi,h)\operatorname{th}\frac{\pi(\xi-x)}{2h}\, d\xi = v(x),$$

отриманих для класу $Nu_2^{(1,\alpha)}(1,D)$. Невелика видозміна міркувань, що призвели до рівнянь (1.30), дозволить поширити ці рівняння і на ширший клас функцій $Nu^{(1,\alpha)}(1,D)$. Не вдаючись в деталі, будуймо наступну теорію розв'язку задачі *без посилань на властивості класу* $Nu_2^{(1,\alpha)}(1,D)$.

3.1. ВИЗНАЧЕННЯ КОНТАКТУ МЕТОДОМ ЛАВРЕНТЬЄВА-ЧОРНОГО

Розв'язок $\{S^{+}(x,h), S^{=}(x,h)\}$ так званої системи рівнянь Страхова (1.30) шукатимемо за допомогою ітераційного процесу

$$S_{n+1}^{+}(x,h)=v(x)-\frac{1}{2h}\int_{-\infty}^{\infty}S_n^{+}(\xi,h)\left(\operatorname{ch}\frac{\pi(\xi-x)}{2h}\right)^{-1}d\xi+S_n^{+}(x,h),\qquad(3.1)$$

$$S_{n+1}^{-}(x,h)=v(x)-\frac{1}{2h}\int_{-\infty}^{\infty}S_n^{-}(\xi,h)\operatorname{th}\frac{\pi(\xi-x)}{2h}d\xi+S_n^{-}(x,h),\ S_0^{+}(x,h)=S_0^{-}(x,h)=v(x),\ n=\overline{0,\infty},$$

який надалі називатимемо *процесом Лаврентьєва-Чорного* [51, 102]. Уникаючи далі громіздких записів на зразок $\{S^{+}(x,h), S^{=}(x,h)\}$, позначмо цей комплекс через $S(x,h)$, а відповідну послідовність – через $\{S_n(x,h)\}$. Дослідження процесу (3.1) виконаємо за тією ж схемою, що й процесу (2.24). Перш за все відзначмо, що норми операторів рівнянь (1.42) у просторі неперервних функцій $C^{(1,\alpha)}$ дорівнюють [29, с.204, 129]:

$$\max_x\left|\frac{1}{2h}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\operatorname{ch}\frac{\pi(\xi-x)}{2h}\right)^{-1}d\xi\right|=1,\ \max_x\left|\frac{1}{2h}\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{th}\frac{\pi(\xi-x)}{2h}d\xi\right|=0\,.$$

Через це оператори рівнянь не є *стискаючими* і для відшукання границі $S(x,h)$ послідовності $\{S_n(x,h)\}$ не можна скористатись теоремою Банаха про непорушну точку [74]. Скористаймось іншим шляхом.

3.1.1. Еквівалентне подання. Для доведення збіжності процесу (3.1) подаймо його у зручнішому вигляді, опираючись на таке твердження.

Лема 3.1. *Для додатного параметра h справедливі інтегральні тотожності* [29, с. 207, 208]*:*

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos\omega x}{\operatorname{ch}\omega h}d\omega=\left(2h\operatorname{ch}\frac{\pi x}{2h}\right)^{-1},\ \ h>0,\ \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\omega x}{\operatorname{sh}\omega h}d\omega=\frac{1}{2h}\operatorname{th}\frac{\pi x}{2h},\ \ \frac{1}{h}\int_0^{\infty}\operatorname{th}\frac{\pi x}{2h}\sin\omega x d\omega=(\operatorname{sh}\omega h)^{-1}.$$

Доведення. Дійсно, оскільки при $x>0$ й $\omega>0$ мають місце розклади

$$(\operatorname{ch}\omega h)^{-1}=2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k e^{-(2k+1)\omega h},\ \ \frac{1}{\operatorname{sh}\omega h}=2\sum_{k=0}^{\infty}e^{-(2k+1)\omega h},\ \operatorname{th}\frac{\pi x}{2h}=1+2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k e^{-\frac{k\pi x}{h}},$$

то, враховуючи граничні рівності $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int_{\varepsilon}^{\infty}e^{-m\omega h}\sin\omega x d\omega=\frac{x}{(mh)^2+x^2}$,

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\varepsilon}^{\infty}e^{-m\omega h}\cos\omega x d\omega=\lim_{\varepsilon\to0}\left[\frac{mh}{x}\cos\varepsilon x-\sin\varepsilon x\right]\frac{e^{-m\varepsilon h}}{x}\frac{x^2}{(mh)^2+x^2}=\frac{mh}{(mh)^2+x^2},$$

одразу знаходимо

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos\omega x}{\operatorname{ch}\omega h}d\omega=\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k+1)h}{[(2k+1)h]^2+x^2},\ \ \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\omega x}{\operatorname{sh}\omega h}d\omega=\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x}{[(2k+1)h]^2+x^2},$$

$$\frac{1}{2h}\int_0^{\infty}\operatorname{th}\frac{\pi x}{2h}\sin\omega x dx=\frac{1}{\omega h}+2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\omega h}{(\omega h)^2+(k\pi)^2}.$$

Отже, для завершення доведення нам залишилось довести справедливість подання наступних виразів

$$\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k+1)h}{[(2k+1)h]^2+x^2}=\left(2h\operatorname{ch}\frac{\pi x}{2h}\right)^{-1},\ \ \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x}{[(2k+1)h]^2+x^2}=\frac{1}{2h}\operatorname{th}\frac{\pi x}{2h},$$

$$(\omega h)^{-1}+2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\ \frac{\omega h}{(\omega h)^2+(k\pi)^2}=(\mathrm{sh}\omega h)^{-1}\ .$$

Внаслідок того, що для кожного з них хід доведення ідентичний, обмежмось виведенням другої рівності. Кожен член другого розкладу подаймо у вигляді

$$\frac{1}{[(2k+1)h]^2+x^2}=\frac{1}{h^2}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\ \frac{2^{2^m}}{\pi^{2m}\cdot(2k+1)^{2m+2}}\left(\frac{\pi x}{2h}\right)^{2m}$$

й підставимо отриманий ряд в початковий. Після підсумування за індексом k з урахуванням рівностей

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+2)^{2(m+1)}}=\frac{\left(2^{2(m+1)}-1\right)\pi^{2(m+1)}}{2\,[2(m+1)]!}\left|B_{2(m+1)}\right|,$$

отримуємо

$$\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x}{[(2k+1)h]^2+x^2}=\frac{2x}{\pi h^2}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2^{2^m}}{\pi^{2m}(2k+1)^{2(m+1)}}\left(\frac{\pi x}{2h}\right)^{2m}=$$

$$=\frac{1}{2h}\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2^{2(m+1)}\left(2^{2(m+1)}-1\right)}{[2(m+1)]!}B_{2(m+1)}\left(\frac{\pi x}{2h}\right)^{2m+1}=\frac{1}{2h}\,\mathrm{th}\,\frac{\pi x}{2h},$$

де B_n – числа Бернуллі [29, с. 15]; лему доведено. ■

Надалі розглядатимемо лише перший із двох ітераційних процесів (3.1) й перепишемо його з урахуванням формул (2.24) та щойно доведених тотожностей; це врешті-решт приводить до такого твердження.

Лема 3.2. *Якщо послідовність функцій $\{S^+(x,h)\}$ породжується ітераційним процесом Лаврентьєва-Чорного, то еквівалентна їй послідовність ґенерується за допомогою послідовних наближень*

$$S_n^+(x,h)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}v(\xi)d\xi\int_0^{\infty}\cos\omega(\xi-x)\sum_{k=0}^{\infty}\left(1-(\mathrm{ch}\omega h)^{-1}\right)^k d\omega\,. \qquad (3.2)$$

Доведення. Для цього досить встановити взаємно однозначну відповідність між наближеннями $S_n(x,h)$, отриманими за формулами (3.1) й (3.2). Доведення ведемо індукцією за індексом n. Перш за все для $n=0$ на основі подання (3.1), означення (2.24) й леми 3.1 отримуємо ланцюжок рівностей

$$S_0^+(x,h)=v(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}v(\xi)d\xi\int_0^{\infty}\cos\omega(\xi-x)d\omega\ ,$$

а для $n=1$ маємо

$$S_1^+(x,h)=v(x)-\frac{1}{2h}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\mathrm{ch}\frac{\pi(\xi-x)}{2h}\right)^{-1}S_0^+(\xi,h)+S_0^+(x,h)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}v(\xi)d\xi\int_0^{\infty}\cos\omega(\xi-x)d\omega-$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}v(\xi)d\xi\int_0^{\infty}\cos\omega(\xi-x)d\omega\cdot\frac{1}{2h}\int_0^{\infty}\left(\mathrm{ch}\frac{\pi u}{2h}\right)^{-1}\cos\omega u du+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}v(\xi)d\xi\int_0^{\infty}\cos\omega(\xi-x)d\omega=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}v(\xi)d\xi\int_0^{\infty}\cos\omega(\xi-x)\left[1+\left(1-(\mathrm{ch}\omega h)^{-1}\right)\right]d\omega\,.$$

Приймаючи $S_0(x,h)$ й $S_1(x,h)$ за базис індукції, допустимо, що для будь-якого натурального $n>1$ має місце відношення

$$S_n^+(x,h)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}v(\xi)d\xi\int_0^{\infty}\cos\omega(\xi-x)\sum_{k=0}^{n}\left(1-(\text{ch}\omega h)^{-1}\right)^k d\omega,$$

яке стверджується в лемі. Безпосереднім виведенням для $n=0,1$ переконуємось у справедливості цієї формули. Нехай вона вірна для деякого натурального числа $n\neq 0,1$; тоді для $n+1$ на основі подання (3.1), означення (2.24) і леми 3.1 знаходимо, що

$$S_{n+1}^+(x,h)=v(x)-\frac{1}{2h}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\text{ch}\frac{\pi(\xi-x)}{2h}\right)^{-1}S_n^+(\xi,h)+S_n^+(x,h)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}v(\xi)d\xi\int_0^{\infty}\cos\omega(\xi-x)d\omega-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}v(\xi)d\xi\int_0^{\infty}\cos\omega(\xi-x)d\omega\sum_{k=0}^{n}\left(1-(\text{ch}\omega h)^{-1}\right)^k d\omega\cdot\frac{1}{2h}\int_0^{\infty}\left(\text{ch}\frac{\pi u}{2h}\right)^{-1}\cos\omega u du+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}v(\xi)d\xi\int_0^{\infty}\cos\omega(\xi-x)d\omega\sum_{k=0}^{n}\left(1-(\text{ch}\omega h)^{-1}\right)^k d\omega=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}v(\xi)d\xi\int_0^{\infty}\cos\omega(\xi-x)\times$$

$$\times\left\{1-\sum_{k=0}^{n}\left(1-(\text{ch}\omega h)^{-1}\right)^k(\text{ch}\omega h)^{-1}+\sum_{k=0}^{n}\left(1-(\text{ch}\omega h)^{-1}\right)^k\right\}d\omega=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}v(\xi)d\xi\int_0^{\infty}\cos\omega(\xi-x)\sum_{k=0}^{n+1}\left(1-(\text{ch}\omega h)^{-1}\right)^k d\omega,$$

що й завершує доказ першої частини леми: кожен член послідовності $\{S_n(x,h)\}$, породженої із (3.1), зображається у вигляді (3.2). Аналогічно доведенню леми 2.2 переконуємось і у зворотному – кожен член послідовності, ґенерованої ітераціями (3.2), подається через (3.1), що завершує доказ леми[12]. ■

Отже, маємо всі підстави сформулювати основний результат цього підрозділу. Мається на увазі збіжність процесу ітерацій Лаврентьєва-Чорного.

3.1.2. Збіжність процесу. Це питання стисло висвітлює така теорема.

Теорема 3.1. *Якщо послідовність функцій $\{S_n^+(x,h)\}$ породжується ітераційним процесом Лаврентьєва-Чорного, то вона збігається до граничної функції $S^+(x,h)$, яка задовольняє інтегральному рівнянню*

$$\frac{1}{2h}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\text{ch}\frac{\pi(\xi-x)}{2h}\right)^{-1}S^+(\xi,h)d\xi=v(x),\tag{3.3}$$

зі швидкістю геометричної прогресії, яка оцінюється нерівністю

$$\left\|S_{n+1}^+(x,h)-S_n^+(x,h)\right\|_C\leq\frac{M(h)}{h(2n+3)},\quad \text{де } M(h)=\max_{x\in R^{(1)}}\left|S^+(x,h)\right|.$$

Доведення. Вияснимо збіжність послідовних наближень $\{S_n^+(x,h)\}$. Оскільки через те, що $h>0$ і $\omega>0$ буде $1-(\text{ch}\omega h)^{-1}<1$, то знаходимо

$$\lim_{n\to\infty}S_n^+(\omega,h)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(1-(\text{ch}\omega h)^{-1}\right)^k=\lim_{n\to\infty}\left[1-\left(1-(\text{ch}\omega h)^{-1}\right)^{n+1}\right]\text{ch}\omega h=\text{ch}\omega h.$$

---

[12] Нескладно вивести відношення для $S_{n+1}(x,h)$, що різниться лиш тригонометричними аргументами при $d\omega$.

Це означає, що існує гранична функція

$$\widetilde{S}^{+}(x,h)=\lim_{n\to\infty}S_n^{+}(x,h)=\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}v(\xi)d\xi\int_0^{\infty}\cos\omega(\xi-x)$$

$$S_n^{+}(\omega,h)d\omega=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}v(\xi)d\xi\int_0^{\infty}\cos\omega(\xi-x)\operatorname{ch}\omega h d\omega .$$

Покажімо що гранична функція $\widetilde{S}^{+}(x,h)$ обмежена й співпадає з шуканою $S^{+}(x,h)$. Розгляньмо у зв'язку з цим наступний ланцюжок рівностей

$$\frac{1}{2h}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\operatorname{ch}\frac{\pi(\xi-x)}{2h}\right)^{-1}\widetilde{S}^{+}(\xi,h)d\xi=\frac{1}{2h}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\operatorname{ch}\frac{\pi(\xi-x)}{2h}\right)^{-1}d\xi\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}v(t)dt\int_0^{\infty}\cos\omega(\xi-t)\operatorname{ch}\omega h d\omega\right\}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}v(t)dt\int_0^{\infty}\operatorname{ch}\omega h d\omega\cdot\frac{1}{2h}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\operatorname{ch}\frac{\pi(\xi-x)}{2h}\right)^{-1}\cos\omega(\xi-t)d\xi=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}v(t)dt\int_0^{\infty}\cos\omega(t-x)\operatorname{ch}\omega h d\omega\cdot\frac{1}{2h}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\operatorname{ch}\frac{\pi u}{2h}\right)^{-1}\cos\omega u du=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}v(t)dt\int_0^{\infty}\cos\omega(t-x)\operatorname{ch}\omega h d\omega\cdot\frac{2\pi}{2h}\left(2\left(\frac{\pi}{2h}\right)\operatorname{ch}\frac{\pi\omega}{2(\pi/2h)}\right)^{-1}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}v(\xi)d\xi\int_0^{\infty}\cos\omega(\xi-x)d\omega=v(x).$$

Звідси, внаслідок єдиності подання (3.1), виходить, що *гранична функція* $\widetilde{S}^{+}(x,h)$ *тотожньо співпадає із функцією* $S^{+}(x,h)$, яка подає розв'язок першого з системи рівнянь (1.30) Страхова у вигляді

$$S^{+}(x,h)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}v(\xi)d\xi\int_0^{\infty}\cos\omega(\xi-x)\operatorname{ch}\omega h d\omega .$$

Обмеженість $S(x,h)$ випливає з попереднього ланцюжка рівностей, тотожності $\widetilde{S}^{+}(x,h)\equiv S^{+}(x,h)$ і обмеженості функції $v(x)$, $x\in R^{(1)}$. Завершуючи доведення, оцінімо швидкість збіжності процесу (3.1). На основі леми 3.2 отримуємо

$$S_{n+1}^{+}(x,h)-S_n^{+}(x,h)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}v(\xi)d\xi\int_0^{\infty}\cos\omega(\xi-x)\left(1-(\operatorname{ch}\omega h)^{-1}\right)^{n+1}d\omega,$$

звідки з врахуванням нерівності Коші-Буняковського знаходимо

$$\left|S_{n+1}^{+}(x,h)-S_n^{+}(x,h)\right|\le\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}v(\xi)d\xi\int_0^{\infty}e^{\omega h}\cos\omega(\xi-x)d\omega\right|\left|\int_0^{\infty}\left(1-(\operatorname{ch}\omega h)^{-1}\right)^{n+1}e^{-\omega h}d\omega\right|\le$$

$$\le\frac{1}{h}\max_x|v(x,h)|\left|\int_0^1\left(1-\frac{2u}{1+u^2}\right)^{n+1}du\right|\le\frac{M(h)}{h(2n+3)},$$

що й потрібно було довести. ■

Зауваження **3.1.** Розвинутий при доведенні теореми 2.2 спосіб можна використати безпосередньо лише для доведення збіжності наближень $\{S_n^{+}(x,h)\}$, оскільки нерівність $1-(\operatorname{ch}\omega h)^{-1}<1$ справедлива для будь-яких $h>0$ й $\omega>0$, а $1-(\operatorname{sh}\omega h)^{-1}<1$ виконується лише за обмеження $\omega h>0.485$, тому для доведення збіжності $\{S_n^{-}(x,h)\}$ слід застосовувати регуляризацію

узагальнених функцій[13]. Це значно ускладнює схему доведення.

Саме тому ми обмежились дослідженням наближень $\{S_n^+(x,h)\}$, а збіжність наближень $\{S_n^-(x,h)\}$ доведемо згодом на чисельних прикладах, як це зроблено наприклад, в [163, 167].

***Зауваження* 3.2.** Цікаво відзначити, що рівняння (3.3) задає один із часто застосовних у практиці інтерпретації способів згладження спостереженого поля [32, с. 224] таке згладження аналогічне перерахунку поля на висоту *h*, тому глибина до верхньої границі контактної смуги буде на *h* нижча, ніж отримана від незгладженого поля.

Співставляючи між собою ітераційні процеси Лаврентьєва-Андреєва (2.24) і Лаврентьєва-Чорного (3.1), бачимо, що хоч *другий процес збігається швидше за перший майже вдвічі, проте їх швидкості майже однакові за порядком*. В обидвох процесах швидкості збіжності спадають разом з ростом глибини перерахунку h і індексу ітерації n. Одначе, з практичного погляду, ітераційний процес Лаврентьєва-Чорного має ту перевагу над “андреєвським”, *що завдяки швидкому затуханню по горизонталі ядер перетворень (3.1) для відновлення наближень* $S(x,h)$ *з певною точністю потрібно знати значення поля* $v(x)$ *на істотно коротших профілях, ніж при використанні інтегралу Пуассона.*

***Зауваження* 3.3.** У висновку 1.3 стверджується, що для обчислень лінійного наближення контактної границі, окрім згаданого в теоремі розв’язку двох інтегральних рівнянь Страхова, існує й інша альтернатива:

1) розв’язати лише одне рівняння (1.39) з правою частиною (1.38);

2) розв’язати лише одне (перше) з рівнянь (1.30) з наступним обчисленням функції $\zeta(x,h)$ за формулою (1.40).

При реалізації обидвох можливостей можна скористатись методом Лаврентьєва-Чорного, проте слід мати на увазі, що *його переваги в даній ситуації не спрацюють*; це зумовлено тим, що ядра перетворень (1.38) й (1.40) затухають по горизонталі повільніше, ніж ядра (1.30) При обчисленнях варто надати перевагу першому з них, оскільки ядро (1.38) затухає все ж швидше за пуассонівське.

Безпосереднім наслідком теореми 3.1 є той факт, що модуль неперервності оберненого оператора рівняння (1.39) оцінюється величиною $|\zeta(x)-\zeta_n(x)|\le\dfrac{N(h)}{h(2n+2)}$, де $N(h)=2\max\limits_{x\in R^{(1)}}|v(x)+v(x,2h)|$, $v(x,2h)$ – аналітично продовжені значення $v(x)$ як гармонічної функції, з рівня $y=0$ на рівень $y=2h$.

Доведення провадиться на основі впровадження нерівності Коші-Буняковського до еквівалентного подання виразу (3.1). За аналогічною схемою можна довести і збіжність

---

[13] Цю методу освітлено в серії статтей: *Гольцев В.С., Чорний А.В.* О восстановлении производных гармонических функций, описывающих гравитационные и магнитные аномалии, по приближенно заданным их значениям в регулярной сети точек вещественной оси. Ч. 1-5 // Геофиз. журнал, 1979-1986; початок – в т.1, 1979, №2, с. 48-56.

узагальнених ітерацій (1.42) для вирішення рівняння (1.25).

3.2. ВИЗНАЧЕННЯ КОНТАКТУ УЗАГАЛЬНЕНИМ МЕТОДОМ З ЯДРОМ ШВАРЦА

Розв'язок системи рівнянь (1.42) для визначення контакту на *істотно обмежених* інтервалах шукатимемо за допомогою ітераційного процесу

$$S_0^+(x)=S_0^-(x)=\zeta_0(x)=v(x),\quad S_{n+1}^+(x)=v(x)-\frac{1}{2\zeta_n(x)}\int_{-\infty}^{\infty}S_n^+(\xi)\left(\operatorname{ch}\frac{\pi(\xi-x)}{2\zeta_n(x)}\right)^{-1}d\xi+S_n^+(x),$$

$$S_{n+1}^-(x)=v(x)-\frac{1}{2\zeta_n(x)}\int_{-\infty}^{\infty}S_n^-(\xi)\operatorname{th}\frac{\pi(\xi-x)}{2\zeta_n(x)}d\xi+S_n^-(x),\ \zeta_n(x)=S_n^+(x)+S_n^-(x),\ n=\overline{0,\infty}, \qquad (3.4)$$

який надалі називатимемо *узагальненим процесом Лаврентьєва-Чорного*.

Пройдемо через ті ж етапи, що й при дослідженні процесу Лаврентьєва-Андреєва, починаючи з еквівалентного подання рівняння.

3.2.1. Еквівалентне подання.

Перед доведенням збіжності процесу (3.4) корисно подати його у зручнішій формі. В цьому значну роль відіграє лема.

Лема 3.3. *Для будь-якого додатного на осі* $x\in R^{(1)}$ *значення* $\zeta(x)>0$ *справедливі такі інтегральні тотожності*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x\omega}{\operatorname{ch}\omega\zeta(x)}d\omega=\frac{1}{2\zeta(x)}\left(\operatorname{ch}\frac{\pi x}{2\zeta(x)}\right)^{-1},\quad \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin x\omega}{\operatorname{sh}\zeta(x)}d\omega=\frac{1}{2\zeta(x)}\operatorname{th}\frac{\pi x}{2\zeta(x)},$$

$$\lim_{y\to x}\int_0^{\infty}\operatorname{th}\frac{\pi x}{2\zeta(x)}\sin x\omega dx=\frac{\zeta(x)}{\operatorname{sh}\omega\zeta(x)}.$$

Доведення леми аналогічне доведенню леми 3.1. ■

Обмежмось надалі розглядом лише *першого* із двох ітераційних процесів (3.4), доводячи збіжність іншого на чисельних прикладах. Дослідження першого процесу спровоковане не лише його доступністю, але й самостійним інтересом, ініційованим висновком 1.4 (с. 46). Згідно цього висновку *контакт* $\zeta(x)$ *можна знайти через розв'язок рівняння* ($1.44_{1,2}$), *або через розв'язок першого з рівнянь* (1.42) *з наступним обчисленням контакту за формулою* (1.45). Розв'язок рівнянь (1.42) і (1.4 4) теж можна шукати за узагальненим процесом Лаврентьєва-Чорного, який для рівняння (1.44_1) матиме такий вигляд

$$\zeta_{n+1}(x)=W(x)-\frac{1}{4\zeta_n(x)}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\operatorname{ch}\frac{\pi(\xi-x)}{2\zeta_n(x)}\right)^{-1}\zeta_n(\xi)d\xi+\zeta_n(x),n=\overline{0,\infty},\ \zeta_0(x)=v(x), \qquad (3.5)$$

праву частина в якому визначають як

$$W_n(x)=v(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}K(\xi-x;\zeta_n(x))v(\xi)d\xi,\ K(\xi-x;\zeta_n(x))=\frac{1}{4h}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\operatorname{ch}\frac{\pi(t-x)}{2\zeta_n(x)}\right)^{-1}\frac{dt}{(t-\xi)^2+\zeta_n^2(x)}.$$

При вирішенні першого із рівнянь (1.42) наближення контакту, на відміну від (3.4),

повинне обчислюватись згідно подання (1.45), тобто у вигляді

$$\zeta_{n+1}(x) = 2S_{n+1}^{+}(x) - \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta_n(x)}{\zeta_n^2(x) + (\xi - x)^2} v(\xi) d\xi \,. \qquad (3.6)$$

Обмежуючись розглядом першого з рівнянь (3.4), перепишімо його в зручному для наступних викладок вигляді. Допоможе нам у цьому така лема.

Лема 3.4. *Якщо послідовність функцій* $\{S_n^{+}(x,h)\}$ *породжується ітераційним процесом Лаврентьєва-Чорного, то еквівалентна їй послідовність ґенерується за допомогою послідовних наближень*

$$S_n^{+}(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} v(\xi) d\xi \int\limits_{0}^{\infty} \cos\omega(\xi - x)\left\{1 + \sum_{i=1}^{n}\prod_{j=n-i}^{n-1}\left(1 - (\mathrm{ch}\,\omega\zeta_j(x))^{-1}\right)\right\} d\omega \,. \qquad (3.7)$$

Доведення. Аналогічне схемі, запровадженій в доведенні лем 2.2 й 3.2. Тому обмежмось коротким доведенням індуктивного відношення (3.7). Допускаючи його вірність для деякого значення індексу n, для наступного індексу $n+1$ згідно леми 3.3 й ітерацій (3.4) отримаємо

$$S_{n+1}^{+}(x) = v(x) - \frac{1}{2\zeta_n(x)}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S_n^{+}(\xi)\left(\mathrm{ch}\,\frac{\pi(\xi - x)}{2\zeta_n(x)}\right)^{-1} d\xi + S_n^{+}(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} v(t) dt \int\limits_{0}^{\infty} \cos\omega(t - x) d\omega -$$

$$- \frac{1}{2\zeta_n(x)}\lim_{y\to x}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\mathrm{ch}\,\frac{\pi(\xi - x)}{2\zeta_n(y)}\right)^{-1} d\xi \left\{\frac{1}{\pi}\lim_{y\to\xi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} v(t) dt \int\limits_{0}^{\infty} \cos\omega(t - \xi)\left(1 + \sum_{i=1}^{n}\prod_{j=n-i}^{n-1}\left(1 - (\mathrm{ch}\,\omega\zeta_j(x))^{-1}\right)\right) d\omega\right\} +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} v(t) dt \int\limits_{0}^{\infty} \cos\omega(t - x)\left(1 + \sum_{i=1}^{n}\prod_{j=n-i}^{n-1}\left(1 - (\mathrm{ch}\,\omega\zeta_j(x))^{-1}\right)\right) d\omega = \cdots =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} v(\xi) d\xi \int\limits_{0}^{\infty} \cos\omega(\xi - x)\left(1 + \sum_{i=1}^{n+1}\prod_{j=n+1-i}^{n}\left(1 - (\mathrm{ch}\,\omega\zeta_j(x))^{-1}\right)\right) d\omega \,.$$

Ми прийшли до вигляду рівняння (3.7), а оскільки з безпосередньої перевірки випливає, що формула (3.7) вірна для $n = 0,1,2$, то, враховуючи зроблене раніше зауваження, переконуємось в твердженні леми. ■

Існування розв’язку, як і раніше, доводимо через його збіжність.

3.2.2. Збіжність процесу. Збіжність ітерацій є невід’ємною властивістю наближень (3.4). У цьому можна пересвідчитись з такого твердження.

Теорема 3.2. *Послідовність функцій* $\{S_n^{+}(x)\}$*, породжена узагальненим процесом Лаврентьєва-Чорного* (3.4)*, збігається до граничної функції* $S^{+}(x)$*, яка задовольняє інтегральному рівнянню*

$$\frac{1}{2\zeta(x)}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S^{+}(\xi)\left(\mathrm{ch}\,\frac{\pi(\xi - x)}{2\zeta(x)}\right)^{-1} d\xi = v(x),$$

зі швидкістю геометричної прогресії, оцінюваної нерівністю

$$\left\| S_{n+1}^{+}(x) - S_{n}^{+}(x) \right\|_{C} \le \frac{h^{+}}{h^{-}(2n+3)}, \; \text{де } h^{-} = \min_{x \in R^{(1)}}(x), \quad h^{+} = \max_{x \in R^{(1)}}(x).$$

Доведення. Збіжність наближень (3.7) доведемо, переконавшись у збіжності частинних сум $T_n(\omega, x) = 1 + \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=n-i}^{n-1} \left(1 - \left(\mathrm{ch}\omega\zeta_j(x)\right)^{-1}\right)$ для будь-якого $x \in R^{(1)}$ при $n \to \infty$. Оберімо величини $h_x^{-} = \inf_{j}\{\zeta_j(x)\}$, $h_x^{+} = \sup_{j}\{\zeta_j(x)\}, h^{-} \le h_x^{-} \le h_x^{+} \le h^{+}$, тобто звузьмо клас розв'язків[14]**.** Тоді для будь-яких значень $x \in R^{(1)}$ й $0 \le j \le n$ справедливі нерівності

$$1 - \left(\mathrm{ch}\omega h^{-}\right)^{-1} < 1 - \left(\mathrm{ch}\omega\zeta_j(x)\right)^{-1} < 1 - \left(\mathrm{ch}\omega h^{+}\right)^{-1} < 1, \tag{3.8$_1$}$$

а для будь-якого фіксованого значення $x \in R^{(1)}$ й будь-якого $0 \le j \le n$ інші –

$$1 - \left(\mathrm{ch}\omega h_x^{-}\right)^{-1} < 1 - \left(\mathrm{ch}\omega\zeta_j(x)\right)^{-1} < 1 - \left(\mathrm{ch}\omega h_x^{+}\right)^{-1} < 1. \tag{3.8$_2$}$$

З нерівності (3.8$_1$) випливає, що частинні суми $T_n(\omega, x)$ обмежені знизу і зверху, а саме

$$\sum_{k=0}^{n}\left(1 - \left(\mathrm{ch}\omega h^{-}\right)^{-1}\right)^{k} \le T_n(\omega, x) \le \sum_{k=0}^{n}\left(1 - \left(\mathrm{ch}\omega h^{+}\right)^{-1}\right)^{k}.$$

Оскільки має місце

$$\sum_{k=0}^{n}\left(1 - (\mathrm{ch}\omega h)^{-1}\right)^{k} = \left[1 - \left(1 - (\mathrm{ch}\omega h)^{-1}\right)^{k+1}\right]\mathrm{ch}\omega h, \tag{3.9}$$

то, очевидно, $\mathrm{ch}\omega h^{-} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(1 - \left(\mathrm{ch}\omega h^{-}\right)^{-1}\right)^{k} \le \lim_{n\to\infty} T_n(\omega, x) \le \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(1 - \left(\mathrm{ch}\omega h^{+}\right)^{-1}\right)^{k} = \mathrm{ch}\omega h^{+}$,

тобто границя частинних сум $T_n(\omega, x)$ при $n \to \infty$ обмежена. З нерівностей (3.8$_2$) випливає, що обмежена послідовність $\{T_n(\omega, x)\}$ має в кожній точці $x \in R^{(1)}$ цілком визначену границю $\mathrm{ch}\omega\zeta(x)$. Переконаймось, що дійсно

$$\lim_{n\to\infty} T_n(\omega, x) = \mathrm{ch}\omega\zeta(x). \tag{3.10}$$

Для цього на основі оцінок (3.8$_2$) й рівності (3.9) запишемо, з одного боку, що

$$\left[1 - \left(1 - \left(\mathrm{ch}\omega h_x^{-}\right)^{-1}\right)^{n+1}\right]\mathrm{ch}\omega h_x^{-} - \mathrm{ch}\omega\zeta(x) = 2\,\mathrm{sh}\frac{h_x^{-} + \zeta(x)}{2}\mathrm{sh}\omega\frac{h_x^{-} - \zeta(x)}{2} - \left(1 - \left(\mathrm{ch}\omega h_x^{-}\right)^{-1}\right)^{n+1}\mathrm{ch}\omega h_x^{+},$$

а з іншого – маємо

$$\left[1 - \left(1 - \left(\mathrm{ch}\omega h_x^{+}\right)^{-1}\right)^{n+1}\right]\mathrm{ch}\omega h_x^{+} - \mathrm{ch}\omega\zeta(x) =$$
$$2\,\mathrm{sh}\omega\frac{h_x^{+} + \zeta(x)}{2}\mathrm{sh}\omega\frac{h_x^{+} - \zeta(x)}{2} - \left(1 - \left(\mathrm{ch}\omega h_x^{+}\right)^{-1}\right)^{n+1}\mathrm{ch}\omega h_x^{+}.$$

Покладімо $h_x^{-} = \zeta(x) - 2\varepsilon_1$, $\varepsilon_1 > 0$, й $h_x^{+} = \zeta(x) + 2\varepsilon_2$, $\varepsilon_2 > 0$, та оберімо $\varepsilon = \max(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ – *максимальну ундуляцію контакту*. Тоді, очевидно, матимемо

$$\left| -2\,\mathrm{sh}\omega(\zeta(x) - \varepsilon)\mathrm{sh}\omega\varepsilon - \left(1 - (\mathrm{ch}\omega(\zeta(x) - 2\omega))^{-1}\right)^{n+1}\mathrm{ch}\omega(\zeta(x) - 2\varepsilon)\right| \le \left|T_n(\omega, x) - \mathrm{ch}\omega\zeta(x)\right| \le$$
$$\le \left|2\,\mathrm{sh}\omega(\zeta(x) + \varepsilon)\mathrm{sh}\omega\varepsilon - \left(1 - (\mathrm{ch}(\zeta(x) + 2\varepsilon))^{-1}\right)^{n+1}\mathrm{ch}\omega(\zeta(x) + 2\varepsilon)\right|.$$

Звідси невідворотно випливає гранична рівність (3.10). Таким чином, послідовність $\{S_n^{+}(x)\}$ збігається до граничної функції

---

[14] Це суттєво лише для ходу доведення і не позначається на сфері застосування розв`язку.

$$\widetilde{S}^+(x)=\lim_{n\to\infty}S_n^+(x)=\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}v(\xi)d\xi\int_0^{\infty}\cos\omega(\xi-x)T_n(\omega,x)d\omega=$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}v(\xi)d\xi\int_0^{\infty}\cos\omega(\xi-x)\mathrm{ch}\omega\zeta(x)d\omega.$$

Переконаймось тепер, що гранична функція $\widetilde{S}^+(x)$ обмежена й співпадає з розв'язком $S^+(x)$ рівняння (1.42). Задля цього помножмо її ліву й праву частини на функцію

$$(2\zeta(\xi))^{-1}\,(\mathrm{ch}\,\pi(\xi-x)/2\zeta(\xi))^{-1} \tag{3.11}$$

й проінтегруймо по всій осі за умови, що значення $\zeta(x)$ й $\zeta(\xi)$ у виразах для $\widetilde{S}^+(x)$ і (3.11) грають роль параметрів, які за потреби можна обрати однаковими, наприклад, $\lim\limits_{y\to x}\zeta(y)$ й $\lim\limits_{y\to\xi}\zeta(y)$, тобто в смислі *узагальнених функцій*. Посилаючись на лему 3.3, нарешті отримуємо

$$\frac{1}{2\zeta(x)}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\mathrm{ch}\frac{\pi(\xi-x)}{2\zeta(x)}\right)^{-1}\widetilde{S}^+(x)dx=\lim_{y\to\xi}\frac{1}{2\zeta(y)}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\mathrm{ch}\frac{\pi(\xi-x)}{2\zeta(y)}\right)^{-1}\widetilde{S}^+(x)dx=\frac{1}{\pi}\lim_{y\to x}\lim_{y\to\xi}\int_{-\infty}^{\infty}v(t)dt\times$$

$$\times\int_0^{\infty}\cos\omega(t-\xi)\frac{\mathrm{ch}\omega\zeta(y)}{\zeta(y)}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}\left(\mathrm{ch}\frac{\pi u}{2\zeta(y)}\right)^{-1}\cos\omega u du=\ldots=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}v(t)dt\int_0^{\infty}\cos\omega(t-\xi)d\omega=v(\xi).$$

Таким чином, гранична функція $\widetilde{S}^+(x)$ задовольняє рівнянню (1.42), а внаслідок єдиності подання (1.42) й обмеженості функції $v(x)$, $x\in R^{(1)}$, приходимо до висновку, що *функція* $\widetilde{S}^+(x)$ *обмежена й тотожно співпадає з розв'язком* $S^+(x)$ заданого рівняння.

Для завершення доведення теореми залишається оцінити швидкість збіжності наближень. На основі леми 3.4 знаходимо

$$S_{n+1}^+(x)-S_n^+(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}v(\xi)d\xi\int_0^{\infty}\cos\omega(\xi-x)[1-\mathrm{ch}\omega\zeta_n(x)T_n(\omega,x)]d\omega.$$

Звідси, враховуючи оцінки (3.8) й нерівність Коші-Буняковського, маємо

$$\left\|S_{n+1}^+(x)-S_n^+(x)\right\|_C=\frac{1}{\pi}\max_x\left|\int_{-\infty}^{\infty}v(\xi)d\xi\int_0^{\infty}\cos\omega(\xi-x)[1-\mathrm{ch}\omega\zeta_n(x)T_n(\omega,x)]d\omega\right|\le$$

$$\le\frac{1}{\pi}\max_x\left|\int_{-\infty}^{\infty}v(\xi)d\xi\int_0^{\infty}\cos\omega(\xi-x)\cdot e^{-\omega h^-}d\omega\right|\left|\int_0^{\infty}\left(1-\left(\mathrm{ch}\omega h^-\right)^{-1}\right)^{n+1}e^{-\omega h^-}d\omega\right|\le\frac{h^+}{h^-(2n+3)},$$

що й доводить теорему. ■

***Зауваження* 3.4**. Як наслідок цієї теореми, визначмо *модуль неперервності* оберненого оператора рівняння (1.44) через нерівність вигляду

$$|\zeta(x)-\zeta_n(x)|\le\frac{N(h^+)}{h^-(2n+3)},\quad N(h^+)=2\max\left|W(x),W(x,2h^+)\right|,$$

де $W(x)$ – мажоранта виразу

$$W^{(n)}(x,\zeta(x))=v^{(n)}(x)+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2k\zeta(x)}{(2k\zeta(x))^2+(\xi-x)^2}v^{(n)}(\xi)d\xi,\quad h\in\left[h^-,h^+\right]$$

за умови $\zeta(x)=h^+=\max\limits_{x\in R^{(1)}}\{\zeta_k(x)\}$, а $W(x,2h^+)$ – аналітично продовжене значення гармонічної функції $W(x)$ з рівня $y=0$ на рівень $y=2h^+$.

Доведення аналогічне до наведеного у попередньому розділі. ■

Без доведення наводимо наступне твердження, що підсумовує вищесказане.

Висновок 3.1. Кожен з послідовності компактних операторів

$$A(v;\zeta_n,x)=v(x)-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\mathrm{ch}\frac{\pi(\xi-x)}{2h}\right)^{-1}d\xi+\zeta_{n-1}(x),\ n=0,1,2,...$$

на обмеженій множині функцій $v(x)$ *майже проектує* на компакт $Nu^{(1,\alpha)}(1,D)$.

3.3. ОСОБЛИВОСТІ ЛІНЕАРИЗОВАНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ

Розглянуті нами досі послідовні наближення для визначення контакту на необмежених та *істотно обмежених* профілях мають вагому різницю у швидкості збіжності. Ця швидкість до того ж спадає з ростом *глибини перерахунку* h і номера ітерації n. Це перешкоджає їх порівнянню та комплексному застосуванню для обробки на ПК польових матеріалів. Залежність від глибини h усунуто через відповідні узагальнені ітераційні процеси (2.30) і (3.4). Чи можна усунути й другу ваду – залежність від номера ітерації n ? Даємо на це ствердну відповідь.

3.3.1. Прискорення збіжності ітерацій. Звести до єдиного знаменника "швидкісні" характеристики ітерацій (2.24), (2.30), як і (3.1), (3.4) можна, якщо прискорити збіжність двох перших. Далі буде показано, що ця процедура поліпшує чисельну стійкість алгоритмів, до яких її застосовують[15]. Виявляється, прискорити, наприклад, процеси (2.24) і (3.1) можна якраз на тій підставі, що вони збігаються як геометричні прогресії. Наведемо загальні міркування з цього приводу.

Позначмо певну еквівалентну послідовність наближень $\{S_n(q)\}$, як функцію знаменника геометричної прогресії, де $S(q)=\sum_{n=0}^{\infty}q^n,\ q<1,\ |S_{n+1}(q)-S_n(q)|=q^n$, а q є, власне, знаменником, наприклад $q=(h(2n+3))^{-1}$ для послідовності $\{S_n^+(x,h)\}$ ітерацій (3.1); її можна перебудувати так, щоб нові послідовності $\{S_n(q_{n-1})\}$ збігались швидше, скажімо, з швидкістю порядку q^{m^n}, $m\geq 2,\ n\geq 1$. Ця можливість криється в тотожності

$$\sum_{n=0}^{\infty}q^n=\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+q_n+q_n^2+...+q_n^{m-1}\right),\ q_n=q_{n-1}^m, n=1,2,...,q_0=q.$$

На базі цієї тотожності замість послідовностей $S_n(q)=\sum_{n=0}^{\infty}q^n$ можемо брати послідовності $S_n(q_{n-1})=\sum_{m=0}^{\infty}\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+q_n+q_n^2+...+q_n^{m-1}\right)$, які доцільно обчислювати за такою схемою

$$S_0(q_0)=1,\ S_{n+1}(q_n)=S_n(q_{n-1})\left(1+q_n+q_n^2+...+q_n^{m-1}\right),\ q_n=q_{n-1}^m=q^{m^n}. \qquad (3.12)$$

---

[15] Через пришвидшену збіжність (малу кількість ітерацій) в алгоритмах не встигають накопичуватись похибки округлень.

Оцінімо швидкість збіжності для $\{S_n(q_{n-1})\}$; оскільки $S_{n+1}(q_n)-S_n(q_{n-1})=q_n\left(1+q_n+q_n^2+...+q_n^{m-2}\right)S_n(q_{n-1})$ й $1-q<1-q_n=1-q^{m^n}$, то, очевидно, справедлива наступна нерівність $|S_n(q_{n-1})|q^{m^n}\le|S_{n+1}(q_n)-S_n(q_{n-1})|\le|S_n(q_{n-1})|(1-q)^{-1}q^{m^n}$, тобто $\{S_n(q_{n-1})\}$ збігається *значно швидше* за $\{S_n(q)\}$. Для процесу Лаврентьєва-Андреєва (2.24), наприклад, за цією схемою при $m=2$, позначаючи знаменник прогресії (2.26) через $q(\omega)=1-e^{-\omega h}<1, \omega>0$, $h>0$, матимемо $n+1$-ше наближення у вигляді:

$$\zeta_{n+1}(x,h)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}v_n(\xi,h)d\xi\int_0^{\infty}\cos\omega(\xi-x)(1+q_n(\omega))d\omega, \tag{3.13}$$

$$q_n(\omega)=q_{n-1}^2(\omega)=...=q_0^{2^n}(\omega),\ q_0(\omega)=q(\omega),\ n=\overline{0,\infty}.$$

Цю схему можна легко поширити і на інші ітераційні процеси. Швидкість збіжності наближення (3.13) описує така теорема.

Теорема 3.3. *Процес послідовних наближень* (3.13) *збігається до функції* $\zeta(x,h),\ x\in R^{(1)},\ h>0$ *зі швидкістю* $|\zeta_{n+1}(x,h)-\zeta_n(x,h)|\le\dfrac{M(h)}{h(2^n+1)}$, $M(h)=2\max|\zeta(x,h)|$.

Доведення. Першу частину теореми доводять аналогічно теоремі 2.1, тоді як друга випливає з нерівності

$$|\zeta_{n+1}(x,h)-\zeta_n(x,h)|\le 2\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\zeta_F(\omega,h)e^{-i\omega x}d\omega\right|\left|\int_0^{\infty}\left(1-e^{-\omega h}\right)^{2^n}e^{-\omega h}d\omega\right|\le\frac{M(h)}{h(2^n+1)},$$

отриманої завдяки використанню нерівності Коші-Буняковського. Співставляючи знаменники початкового і поточного процесів, $\dfrac{M(h)}{h(2^n+1)}<\dfrac{M(h)}{h(n+2)}$, $n>1$, переконуємось у прискоренні збіжності. ■

Дискретні обчислення нівелюють теоретичні переваги, але в деяких випадках вдається добитись прискорення майже на два порядки. Пропоновану схему можна застосувати для модифікації всіх розглянутих вище алгоритмів, причому зауважимо, що через очевидні нерівності

$$\omega\ge 0,\ h>0 \text{ , } 1-(\text{ch}\omega h)^{-1}=\left(1-e^{-\omega h}\right)^2/\left(1+e^{-2\omega h}\right)<\left(1-e^{-\omega h}\right)^2<1-e^{-\omega h},$$

слід надати перевагу функції $q_s=1-(\text{ch}\omega h)^{-1}$в практичній реалізації перед функцією $q_p=1-\left(e^{\omega h}\right)^{-1}$. При цьому перед нами постає питання про співвідношення ступеня прискорення m збіжності з типом функції $q(\omega)$, довжиною інтервалу l і точністю ε задання вихідної функції $\zeta(x,0)$, тобто дослідження залежності $m=f(q,l,\varepsilon)$. До цього ми повернемось згодом.

3.3.2. Про коректність розв'язків. Домінантну роль в теорії розв'язування некоректних задач відіграють проблеми однозначності і стійкості їх розв'язків; для деяких обернених задач ці проблеми вивчено з вичерпною повнотою, зокрема в класичних працях

П.С. Новикова [62], О.О. Заморєва [36], Л.М. Сретенського [82], О.І. Прилєпка [69] та інших [104, 123, 134], і в загальних рисах створено метод їх дослідження. Суть методу полягає в побудові за допомогою фундаментальної інтегро-диференційної тотожності Гріна-Остроградського певного функціоналу, який відбиває рівність зовнішніх потенціалів і властивості густини тіла, яке не зумовлює зовнішнього потенціалу. Його значення оцінюють на гармонічній функції, збудованій за даними задачі Діріхле в об'єднанні областей, які зумовлюють дані потенціали [101, с. 26] і визначають за ними дійсність висловленої думки. Відтак, для конструктивного опису множини єдиності розв'язків вищеописаних задач слід довести їх єдиність[15], умови якої задає конфігурація областей, що породжують зовні себе тотожні потенціали. В силу вкладання $Nu^{(1,\alpha)}(1, D) \subset St^{(1,\alpha)}(1, D)$ посилаємось в цьому плані на теорему єдиності з праці [142]. Одначе через лінійність прямих операторів лінеаризовані розв'язки мають певні особливості.

Множину функцій, на якій задане рівняння має єдиний розв'язок за будь-якої правої частини, називають [146, с. 56] *множиною коректності*. Опишімо наближено аналітичне підґрунтя збудованої *множини коректності* кожного з розглянутих вище ітераційних процесів, переказуючи результати цієї роботи на випадок класу Нумерова. Воно базується на звуженні множини коректності $St^{(1,\alpha)}(1, D)$ вихідного нелінійного інтегрального рівняння (1.4) до множини $Nu^{(1,\alpha)}(1, D)$. Для того, щоб довести правомочність такої процедури, необхідно прояснити взаємозв'язок відповідних операторів нелінійного і лінійних рівнянь, що проявляється в результатах їх дії на одні й ті ж множини функцій. Вигляд спряженого оператора задачі (1.4), який проектує обмежену множину значень оператора прямої задачі у множину коректності, де знаходиться його розв'язок, визначено в [142, 146] як

$$\dot{A}(u; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta(x) + \zeta'(x)(\xi - x)}{\zeta^2(x) + (\xi - x)^2} u(\xi) d\xi ,$$

при розгляді питань розв'язаності рівняння (1.4), а для інтегрального рівняння (1.23_1) на множині коректності $Nu^{(1,\alpha)}(1, D)$ у першому розділі отримано лінійний оператор

$$\ddot{A}^P(v; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta(x)}{\zeta^2(x) + (\xi - x)^2} v(\xi) d\xi . \qquad (3.14)$$

Щоб вияснити дію операторів $\dot{A}(u; x)$ та $\ddot{A}^P(v; x)$ на множину шуканих функцій контакту $\zeta(x)$, визначмо їх різницю

$$\left|\dot{A}(u; x) - \ddot{A}^P(v; x)\right| \le \left\|\zeta'(x)\right\|_C \left\|v^*(x, \xi)\right\|_C ,$$

де $v^*(x, \xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi - x}{\zeta^2(x) + (\xi - x)^2} v(\xi) d\xi$ – спряжена за Гельдером з функцією $v(x)$, $x \in R^{(1)}$ функція. Очевидно, вона обмежена, якщо обмежена $v(x)$; з наведеної оцінки бачимо, що

---

[15] Існування цих розв`язків констатовано, відповідно, у висновках 1.1 і 1.3.

оператори $\dot{A}(u;x)$ й $\ddot{A}^P(v;x)$ близькі один до одного за умов, що $\|\zeta'(x)\|_C < \varepsilon$, або $\|v^*(x,\xi)\|_C < \varepsilon$ досить малі. Іншими словами, *лінійні оператори* $\dot{A}(u;x)$ *й* $\ddot{A}^P(v;x)$ *близькі один до одного, якщо* $\zeta(x) \in Nu^{(1,\alpha)}(1,D)$. У такому випадку простори розв'язків рівнянь (1.4) і (1.23$_1$) близькі між собою і оператор (3.14) *майже проектує розв'язок* $\zeta(x)$ *у множину* $Nu^{(1,\alpha)}(1,D)$. По-суті, розвинута нами теорія задачі для контактної поверхні в лінеаризованій постановці базується якраз на вказаній властивості лінійного оператора $\ddot{A}^P(v;x)$. Дійсно, за умови $\|v^*(x,\xi)\|_C < \varepsilon$ контакти $\zeta(x) \in Nu^{(1,\alpha)}(1,D)$, що породжують поля $v^*(x,\xi)$, самі по собі не дуже виразні і мало відрізняються від прямої $y = h$. Це в свою чергу забезпечує близькість оператора $\ddot{A}^P(v;x)$ до оператора $\widetilde{A}(v;x)$ лінійного інтегрального рівняння (1.23$_1$). Аналогічно трактують і близькість $\dot{A}(u;x)$ та оператора $\ddot{A}^S(v;x)$ рівняння (1.24) та їх узагальнених аналогів.

Стійкість розв'язку оберненої задачі визначається тим, що малим варіаціям полів в метриці простору $C^{(1,\alpha)}(D)$ відповідають малі варіації будови середовища в метриці банахового простору. Критерій стійкості для *нелінійного рівняння* (1.4) справедливий лише на компакті $St^{(1,\alpha)}(1,D)$, а взагалі не дотримується, що проілюстровано на системі "ступенеподібних" контактів [146, с. 78] (іншу особливість підкреслено в *зауваженні* 1.2). В силу визначення класу $Nu^{(1,\alpha)}(1,D) \subset St^{(1,\alpha)}(1,D)$, і як наслідок теореми 2.4, можна постулювати *стійкість* визначення контакту $\zeta(x)$, $x \in R^{(1)}$ на компакті $Nu_2^{(1,\alpha)}(1,D)$ теоремно. Нехай функції $\zeta_i(x)$, $i = 1,2$, що описують границі двох "паралельних" ступенеподібних контактів $\zeta_1(x) = \zeta(x)$, $\zeta_1(x) = \zeta(x) + c$ однорідних середовищ, неперервно диференційовані, а їх похідні обмежені, тобто належать до $Nu_2^{(1,\alpha)}(1,D)$.

Теорема 3.4. *Якщо за малого* $\varepsilon > 0$ *поля, породжені "паралельними" контактами з класу* $Nu_2^{(1,\alpha)}(1,D)$, *незначно ухиляються одне від одного в смислі нерівності* $\|u_1(x) - u_2(x)\|_C < \varepsilon$, *то самі границі незначно відрізняються одна від одної в смислі* $\|\zeta_1(x) - \zeta_2(x)\|_C \le \delta\varepsilon$, *де* $\delta = f(h^-, h^+)$.

Доведення провадиться за схемою [146, с. 78] з оцінкою різниці $\zeta_1(x) - \zeta_2(x)$ на δ-мережі множини єдиності $Nu_2^{(1,\alpha)}(1,D)$, де $\delta = \varepsilon \cdot h^- / h^+$. Дійсно, оскільки

$$|u_1(x) - u_2(x)| = \frac{1}{\pi}\left| \int_{-a}^{a} \frac{\zeta_1(x)}{(\xi - x)^2 + \zeta_1^2(\xi)} \zeta_1(\xi, x) d\xi - \int_{-a}^{a} \frac{\zeta_2(x)}{(\xi - x)^2 + \zeta_2^2(\xi)} \zeta_2(\xi, x) d\xi \right|,$$

то, пригадуючи оцінки леми 2.3 й інтегруючи частинами, отримаємо

$$|u_1(x) - u_2(x)| = \frac{1}{\pi}\left| \frac{1}{2} \ln \frac{(\xi - x)^2 + \zeta_1^2(\xi)}{(\xi - x)^2 + \zeta_2^2(\xi)} - \pi(\zeta_1(x) + \zeta_2(x)) \right|,$$

звідки для даних контактів маємо

$$|u_1(x) - u_2(x)| = \frac{c}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta(\xi)}{(\xi - x)^2 + \zeta^2(\xi)} d\xi + \frac{c^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\xi - x)^2 - (\zeta(\xi) + \theta c)^2}{\left[(\xi - x)^2 + (\zeta(\xi) + \theta c)^2\right]^2} d\xi + |\zeta_2(x) - \zeta_1(x)|, \quad 0 \le \theta \le 1$$

.

З належності контактів до класу $Nu_2^{(1,\alpha)}(1,D)$ з обмеженнями (1.19-1.21) негайно випливає оцінка

$$\left\|u_1(x)-u_2(x)\right\|_C \geq \frac{ch^+}{\pi h^-}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h^+}{(\xi-x)^2+\left(h^-\right)^2}d\xi+\left|h^+-h^-\right| \approx c\frac{h^+}{h^-}+\omega(\zeta)\cong c\frac{h^+\left(1+h^-\right)}{h^-}\equiv c\delta,$$

що й треба було довести. ■

Результати цієї теореми справедливі і для контактів, що описуються рівняннями (3.1). Через те, що $\frac{1}{2h}\int_{-\infty}^{\infty}(\mathrm{ch}\pi(\xi-x))^{-1}d\xi=\frac{1}{4h}$, для першого з них флуктуація полів оцінюється величиною $\left\|u_1(x)-u_2(x)\right\|_C \geq \frac{1}{2}\left|\frac{1}{\zeta_1(x)}-\frac{1}{\zeta_2(x)}\right| \approx c/h^+$, для другого – величиною $\left\|u_1(x)-u_2(x)\right\|_C \geq \frac{c}{2h^+}\ln\left|\frac{\mathrm{ch}\pi(\xi-x)/2h^+}{\mathrm{ch}\pi(\xi-x)/2h^-}\right| \approx cM/2h^+$.

Отже, на образі з класу $Nu_2^{(1,\alpha)}(1,D)$ оператор (3.14) однозначно обернений і стійкий, але через розривність його оберненого оператора для відшукання розв’язку слід застосувати, як наголошувалось у першому розділі, регулярні методи. Суть цих методів полягає в заміні початкової некоректної задачі певною послідовністю коректних задач. При цьому потрібно оконтурити множину коректності розв’язку, для чого потрібно збудувати збіжну послідовність компактних операторів, яка добре апроксимує необмежений оператор оберненої задачі. Теоретично ця проблема розроблена послідовниками А.М. Тихонова [41, 50, 65, 66, 83, 143-147] в детермінованій постановці для точно заданого оператора рівняння зі згорнутою у випуклому стабілізуючому функціоналі апріорною інформацією про розв’язок рівняння. Застосування регуляризації у такому вигляді призводить до згладження розв’язків; проблему ускладнює нестійкість визначення контакту через необмеженість оберненого оператора. Якщо рівень похибок не перевищуватиме заданої величини $\delta(x)$, то наближення контакту можна знайти з відповідних ітераційних процесів за принципом нев’язки, тобто обрати за розв’язок $\tilde{\zeta}_i(x)$ таку функцію послідовності $\{\zeta_n(x)\}$, ґенерованої ітераціями, яка задовольнятиме умові $\left|\left\|A(\zeta_i,x)-u_\delta(x_i)\right\|-\delta(x)\right| \to \min$.

Чисельну реалізацію розв’язків (не)лінійних умовно коректних задач з урахуванням перешкод у вхідних даних обґрунтовано в працях [3, 101, 140, 149], а в працях [143-147] запропоновано методику конструктивного визначення множин коректності і побудови такого неперервного напівоберненого оператора, який серед відомих його модифікацій має найменшу міру обумовленості. *Множини коректності визначають, як області у підпросторах, близьких в деякому смислі до тих, які натягнуто на головні напрями оператора початкового збуреного рівняня, що відповідають більшим відносно рівня перешкод сингулярним числам*. Перевагою алгоритмів є можливість знаходити стійкий розв’язок не лише

щодо збурень даних задачі, а й щодо похибок округлення, вплив яких пригнічують за допомогою багатопараметричної регуляризації на всіх етапах отримання чисельного розв'язку. Деталі цієї методики стосовно нашої задачі обметикуємо в наступному розділі.

Відзначмо, що останнім часом у працях [115, 118, 119, 147] критично переосмислено деякі основоположні моменти теорії регуляризації і отримано нові результати. Деякі з них, поза сумнівом, слід врахувати у практичній реалізації поставленої задачі.

Третій розділ завершує математичний опис контактної задачі формулюванням стійких алгоритмів її наближеного розв'язання. Характеристику їх чисельної реалізації на ПК складає зміст наступного розділу.

Підсумки 3-го розділу. Для визначення контакту на істотно обмежених множинах шляхом розв'язання рівнянь (1.30), (1.39), (1.40) чи їх узагальнень (1.42), (1.44), (1.45) запропоновано відповідні *ітераційні процеси Лаврентьєва-Чорного* (3.1) і (3.4) та "альтернативні" ітерації (3.5) і (3.6). Рівномірну збіжність згаданих процесів стверджено теоремами 3.1 і 3.2 на основі еквівалентних перетворень Фур'є від узагальнених функцій та обмеженості частинних сум ітераційних послідовностей і використання математичної індукції. Ці теореми подають конструктивні схеми визначення (а, отже, й існування) розв'язків. З аналізу модулів неперервності відзначено пропорційну залежність швидкості збіжності ітерацій від їх індексу та глибини h та слабке (лише вдвічі) прискорення порівняно з процесом Лаврентьєва-Андреєва. *Перевагою пропонованих ітерацій є значно менша кількість інформації, необхідна для відновлення наближень $\zeta(x,h)$ контакту з ґарантованою точністю*.

З аналізу властивостей ітерацій виведено ефективну чисельну схему прискорення збіжності ітерацій (3.12), наочно проілюстровану на прикладі процесу Лаврентьєва-Андреєва (3.13) (теорема 3.3). Охарактеризовано множину коректності розв'язків рівнянь та їх чисельну стійкість (теорема 3.4) на основі властивостей відповідних лінійних операторів.

Р О З Д І Л 4
ОСОБЛИВОСТІ ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ’ЯЗАННЯ КОНТАКТНОЇ ЗАДАЧІ НА ОБМЕЖЕНИХ МНОЖИНАХ

Описано загальну стратегію вирішення некоректних задач (дискретизація, мінімізація нев’язки, регуляризація) та наведено покрокові алгоритми, що реалізують ітераційні процеси, виведені у попередніх розділах. Висвітлено результати чисельних експериментів з метою вивчення точності і поліпшення працездатності чисельних схем.

4.1. ЗАГАЛЬНА СТРАТЕГІЯ РОЗВ’ЯЗКУ

Обернені задачі гравіметрії попри явне, як і в даній роботі, формулювання у вигляді інтегральних рівнянь 1-го роду, завжди некоректно поставлені через нестійкість їх розв’язків, яка зумовлена інтегральною природою дії аномальних джерел, що відображається у спостереженому полі. Достовірність їх розв’язків оцінюють через безумовний мінімум функціоналу, який є нормою різниці теоретичного і виміряного полів за певною метрикою. При цьому кількість шуканих геометричних параметрів не повинна перевищувати кількості точок задання поля. Недотримання цієї вимоги у складних геологічних умовах призводить у підсумку до розв’язання погано обумовлених систем лінійних алгебраїчних рівнянь (надалі СЛАР), над якими тяжіє “прокляття розмірності”. Крім того, реальним спостереженим даним властиві похибки вимірів, методу і моделі[36], тому розв’язок оберненої задачі не тотожний, власне, інтерпретації, оскільки є лише певним модельним об’ємом, заповненим густиною $\sigma = f(\alpha)$, а не геологічним тілом. Відтак, підсумком чисельного розв’язання оберненої задачі є скінченна упорядкована множина еквівалентних моделей.

Сформульовану у першому розділі лінеаризовану структурну задачу гравіметрії (1.46) через ряд ітераційних процесів редуковано до знаходження послідовних наближень розв’язків ряду інтегральних рівнянь першого роду. За посередництвом позначень

$$A = \{a_{ij}\},\ \ a_{ij} = c_j\ K(x_i, \xi_j),\ a_{ii} = 2\zeta(x_i) - \sum_{j \neq i}^{n} c_j\ K(x_i, \xi_j),$$

$$\zeta = \{\zeta_j\}^T = \zeta(\xi_j),\ u = \{u_j\} = (1/2\pi\gamma\sigma)U_z(x_i, 0),\ j = 1, n,\ \delta_i = R_n(x_i, n, \zeta),\ i = 1, n$$

лінійне інтегральне рівняння 1-го роду (1.47) можна подати в операторному вигляді

$$\mathbf{A}\zeta \equiv \int_{c_1}^{c_2} K(x, \xi)\zeta(\xi)d\xi = u(x),\ c_0 \le x \le c_3 \qquad (4.1)$$

на парі дійсних гільбертових просторів[37] $H_1 \ni \zeta$ і $H_2 \ni u$. Оскільки інтегральне рівняння має сингулярне ядро та збурену похибками $\|u(x_i) - A\zeta\|_E = \Delta$, $i = 1,2$ праву частину, задану на скінченній множині значень свого аргументу, то задача визначення контакту (4.1) зводиться до наближеного розв’язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) із наближено

---

36 Неточність зумовлено похибками вимірів, недостатність виникає через брак дискретних вимірів для апроксимації гравітаційного ефекту неперервною функцією, а несумісність – через неадекватність моделі реальній геології [163].

37 У такому разі оцінку похибки заміни $\|\zeta - \tilde{\zeta}\| < \delta\|A\|, \delta = \|\delta u\|$ неможливо покращити при $\|A\| = \max\|A\zeta\|$, $\zeta \in E$, $\|\zeta\| = 1$.

заданою правою частиною

$$\mathbf{A}\zeta(x)=u_\delta=u+\delta u,\ \zeta(x)\in Nu^{(1,\alpha)}(1,D),\ u(x)\in H_2, \tag{4.2}$$

де $\mathbf{A}_{n\times m}$, $n\neq m$ – точно задана[38] матриця з дійсними елементами a_{ij}, $1<i<n$, $1<j<m$, $\zeta_{i=1}^{n}$ – шуканий n-вимірний вектор розв’язку, $u_{\delta\,j=1}^{\;m}$ – заданий m-вимірний

вектор, а u і δu суть m-вектори значень корисного сигналу і перешкод. Система (4.1) має *єдиний* розв’язок $\zeta(x)$, а для знаходження стійких наближень системи (4.2) необхідна додаткова інформація про вектор перешкод δu і шуканий розв’язок.

Розглянуті у попередніх розділах інтегральні рівняння для контакту з таких міркувань зводяться до розв’язання сукупності СЛАР на зразок (4.2) з різними операторами $A_k(\zeta)$, що мають схожі властивості. З огляду на це побудуймо теорію розв’язання задачі (4.2) в загальному випадку для деякого *додатно означеного самоспряженого* оператора A. Точність розв’язку системи (4.2) буде оцінкою практичної ефективності розвинутої теорії. Основні труднощі вирішення цієї системи пов’язані з її поганою обумовленістю, а спосіб їх подолання визначає методику *точного розв’язку* системи і вигляд чисельних алгоритмів. Знайти наближений розв’язок $\bar{\zeta}(x)$ некоректних задач на зразок (4.2) за невисокого рівня похибок $\delta(x)$ вхідних даних можна за методом Тихонова. У цьому методі в загальному випадку за розв’язок $\bar{\zeta}(x)$ обирають таку функцію $\zeta_k(x)$ із послідовності $\{\zeta_k(x)\}$, генерованої відповідним процесом ітерацій, яка задовольняє умові

$$\left[\left\|\mathrm{A}(\zeta_k,x)-u_\delta(x)\right\|-\delta\right]\to\min_x$$

Для цього необхідно знати міру похибки δ виміряних значень поля $u_\delta(x)$ із апріорної інформації; зазвичай її задають через систему нерівностей

$$0\le\inf_{x\in R^M}\left\|u_\delta-Ax\right\|_E^2<\delta_{\min}^2\le\left\|\delta u\right\|_E^2\le\delta_{\max}^2<\infty \tag{4.3$_1$}$$

або у спрощеному варіанті згортають у нормі

$$\left\|\delta u\right\|_E^2=\delta^2. \tag{4.3$_2$}$$

***Зауваження* 4.1.** Наразі для розв’язання системи (4.2) вводять ще додаткову умову ортогональності сигналу і перешкод $(u,\delta u)=0$. В [115] для її “врахування” введено спеціальну конструкцію $\dot{\zeta}=\tau\tilde{\zeta}$, $\tau=\left(u_\delta,\mathbf{A}\tilde{\zeta}\right)\Big/\left\|A\tilde{\zeta}\right\|_E^2=1+\left(A\tilde{\zeta},u_\delta-A\tilde{\zeta}\right)\Big/\left\|A\tilde{\zeta}\right\|_E^2$, для якої справедливе характеристичне рівняння найменших квадратів:

$$\left(A\dot{\zeta},u_\delta-A\dot{\zeta}\right)=\tau\left(A\tilde{\zeta},u_\delta-\tau A\tilde{\zeta}\right)=\tau\left\{A\tilde{\zeta},u_\delta-\left(u_\delta,A\tilde{\zeta}\right)\Big/\left\|A\tilde{\zeta}\right\|_E^2\right\}=\tau\left[\left(u_\delta,A\tilde{\zeta}\right)-\left(u_\delta,A\tilde{\zeta}\right)\right]=0,$$

$\min\limits_\tau\left\|u_\delta-\tau A\tilde{\zeta}\right\|_E^2=\left\|u_\delta-A\dot{\zeta}\right\|_E^2\le\left\|u_\delta-A\tilde{\zeta}\right\|_E^2$, $\tilde{\zeta}$ – вектор наближеного розв’язку системи (4.2).

У методі найменших квадратів ми мусимо розв’язувати наближене рівняння $A_\Delta\zeta_\delta=u_\delta+\Delta u$, але, зважаючи на фундаментальну властивість операторного рівняння

---

[38] Якщо це не так, то завжди можна звести задачу до цього випадку – див. О некоторых вопросах теории интерпретации потенциальных полей: Сб. науч. тр. - М.: ОИФЗ РАН, 1999. - 234 с.

$$A\zeta(x)=\begin{cases}u,\zeta(x)\notin\overline{N}\\0,\zeta(x)\in\overline{N}\end{cases}$$

де $\overline{N}$ – нуль-многовид множини значень $\zeta(x)$, залежно від способу дискретизації цієї системи отримуватимемо різні матриці та праві частини з різною долею випадкової δu і систематичної Δu похибок. Ці похибки мають *принципово малі* складові, розділити які неможливо, оскільки їх сума має порядок близький до машинного нуля, а потужність простору похибок значна. Відтак, умова $(u,\delta u)=0$ дуже наближена, що помітив ще Іванов: неможливо за класичним методом найменших квадратів з умовою $\inf\limits_{\zeta\in Q}\|A\zeta(x)-u\|$ розумно вирішити обернену задачу, якщо не накладати додаткових обмежень на вектор *u* та матрицю *A*. В останньому дослідженні цієї проблеми[39] стверджується помилковість умови $(u,\delta u)=0$.

Визначені у попередньому розділі характеристики прямого оператора $A(\zeta,x)$ задачі (4.2) дозволяють в разі точного задання його та правої частини без проблем будувати таку послідовність компактних операторів, яка збігається на певному елементі класу $Nu^{(1,\alpha)}(1,D)$ до точного розв'язку. За наявності перешкод через нестійкість оберненого оператора потрібно вносити корективи у вищезгадану стратегію розв'язування задачі (4.2). Ключовим моментом в переході до скінченновимірної апроксимації "нескінченних" ітераційних процесів в цьому разі є окреслення структури множини єдиності класу $Nu^{(1,\alpha)}(1,D)$. Її характеризує, як сказано вище, *модуль неперервності* оберненого оператора. Його зазвичай визначають як неперервну неспадаючу функцію виду $\omega(\varepsilon)=\sup\limits_{x\in R^{(1)}}|\zeta(x)-\zeta_n(x)|$, де $\varepsilon\ge|A(\zeta;x)-A(\zeta_n;x)|$, $x\in R^{(1)}$.

Конкретний його вигляд для ітераційного процесу (2.23) допоможе прояснити така лема.

Лема 4.1. *Для функцій* $\zeta_n(x)$ *із множини* $Nu_2^{(1,\alpha)}(1,D)$ *з умовою* $h_1=\inf\limits_h\inf\limits_x\{\zeta_n(x)\}$ $h_0=\sup\limits_h\sup\limits_x\{\zeta_n(x)\}$, *генерованих процесом Лаврентьєва-Андреєва* (2.23), *модуль неперервності оберненого оператора рівняння* (2.24) *має оцінку* $\|\zeta(x)-\zeta_n(x)\|_C\le\|\zeta(x)\|_C\,\delta^n(\xi-x)$.

Доведення. Через те, що справедливі співвідношення:

$$\|\zeta_{n+1}(x,h)-\zeta_n(x,h)\|=u(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}\zeta_n(\xi,h)d\xi+$$

$$+\zeta_n(x,h)-u(x)+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}\zeta_{n-1}(\xi,h)d\xi-\zeta_{n-1}(x,h)=\|\zeta_n(x,h)-\zeta_{n-1}(x,h)\|-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}(\zeta_n(\xi,h)-\zeta_{n-1}(\xi,h))d\xi=\left|1-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h_0}{h_1^2+(\xi-x)^2}\frac{h_0}{h_1}d\xi\right|\le\|\zeta_n(x,h)-\zeta_{n-1}(x,h)\|_C,$$

$$A(\zeta+\Delta\zeta;x)-A(\zeta;x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\zeta+\Delta\zeta)x}{(\xi-x)^2+(\zeta(x)+\eta(x))^2}(\zeta(\xi)+\Delta\zeta(\xi))d\xi-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\zeta(x)}{h^2+(\xi-x)^2}\zeta(\xi)d\xi=$$

---

[39] Старостенко В.И., Старков В.Н. О результатах проверки одной гипотезы В.Н. Страхова // Геофиз. журн. – 2003. –25, № 1. – С. 122-127.

$$=\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+(\xi-x)^2}\zeta(\xi)d\xi=\left|\frac{1}{\pi}\int\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}\zeta(\xi)d\xi\right|\equiv\delta(\xi-x)=\begin{cases}\zeta(h), & x=h\\ 0, & x\neq h\end{cases},$$

та як наслідок теореми 2.2, отримуємо очевидні нерівності

$$\|\zeta(x,h)-\zeta_{n+1}(x,h)\|_C\leq\|\zeta(x)-\zeta_n(x)\|_C,$$

$$\|\zeta_{n+1}(x,h)-\zeta_n(x,h)\|_C=u(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}\zeta_n(\xi,h)d\xi+\zeta_n(x,h)-U(x)+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}\zeta_{n-1}(\xi,h)d\xi-\zeta_{n-1}(x,h)=\|\zeta_n(x,h)-\zeta_{n-1}(x,h)\|-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}\times$$

$$\times[\zeta_n(\xi,h)-\zeta_{n-1}(\xi,h)]=|\zeta_n(x,h)|-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\zeta_{n-1}(\xi,h)}{(\xi-x)^2+\zeta_{n-1}^2(\xi,h)}[\zeta_n(\xi,h)-\zeta_{n-1}(\xi,h)]d\xi=$$

$$=\left|1-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h_0}{h_1^2+(\xi-x)^2}\frac{h_0}{h_1}d\xi\right|\|\zeta_n(x,h)-\zeta_{n-1}(x,h)\|\leq 2\|\zeta(x)\|_C\left(1-(h_0/h_1)^2\right)^n.$$

У такому разі отримуємо $\|\zeta(x)-\zeta_{n+1}(x)\|_C\leq\|\zeta(x)\|_C\left(|h_0/h_1|^2\right)^n=\|\zeta(x)\|\delta^n(\xi-x)$. ■

***Зауваження* 4.2.** Кожному ітераційному процесу властива своя величина ε, відтак, і свій модуль неперервності $\omega(\varepsilon)$. Аналогічна обмежена функція $\omega(\varepsilon)$ існує і для узагальненого процесу (2.30).

Задачу розв’язання лінійного інтегрального рівняння першого роду традиційно зводять до мінімізації певного згладжувального функціоналу, що тісно пов’язаний із постановкою вихідної задачі. Це дає можливість збудувати такий регуляризуючий оператор для рівняння (4.2), який дозволить визначити його розв’язок, співставний за точністю з вихідними даними. Побудову стійких розв’язків лінійних некоректно поставлених задач здійснюють через мінімізацію функціонала Тихонова, що є *зваженою* сумою *функціоналу нев’язки* і *стабілізатора* типу *норми* шуканого розв’язку

$$F_\alpha(\zeta,u_\delta)=\|\mathbf{A}\zeta-u_\delta\|^2+\alpha\Omega(\zeta)=\int_D\left(\int_D K(x,\xi)\zeta(\xi)d\xi-u_\delta(x)\right)^2dx+\alpha\|\zeta^2(x)\| \qquad (4.5)$$

на множині D, окресленій обмеженнями (1.19-1.21). В геофізичній літературі доводиться недостатність такого стабілізатора, тому оберемо його по-іншому.

Перед цим варто розглянути ряд допоміжних питань щодо особливостей скінченновимірної апроксимації обернених операторів відповідних рівнянь[40]. Докладну формалізацію відповідних питань для (не)лінійних контактних задач вироблено у працях [142-147]. Міркування проведемо на прикладі операторів (1.23_2) і (1.25), оскільки характеристики інших інтегральних операторів у підсумку зводяться до характеристик згаданих операторів.

4.2. СКІНЧЕННОВИМІРНА АПРОКСИМАЦІЯ РОЗВ’ЯЗКУ

---

[40] Нема потреби нагадувати про складність обчислень і відчутні затрати “машинного” часу для чисельному розв’язання інтегральних рівнянь, пов’язані з неможливістю точного обрахунку інтегральних операторів.

Лінійні оператори $A(\zeta, x)$ є, по-суті, невласними інтегралами (див. (4.5)), які чисельно реалізують за допомогою тих чи інших квадратур. В силу цього при скінченновимірній апроксимації обмежуються деяким отриманим через проектування наближенням кожного з операторів. В [146] показано, що математично така апроксимація полягає в заміні задачі вирішення інтегрального рівняння 1-го роду $A\zeta = u,\ \zeta \in V(A^*) \equiv Nu^{(1,\alpha)}(1, D),\ u \in L^{(2)}(D)$ еквівалентною йому задачею мінімізації функціоналу нев'язки $F(\zeta) = \|A\zeta - u\|^2$ на множині $V(A^*)$. Позначмо через $v = P_{V(A)}\, u$ проекцію точки u на множину $V(A) = \langle u(t) : u \in L^{(2)}(D),\ t \in D,$
$u = A\zeta,\ \zeta \in V(A^*)\rangle$, через $\zeta_* = \zeta_*(t) = \arg \inf_{\zeta \in V_0(A^*)} F(\zeta),\ t \in D$ – точку нижньої грані $F_* = F(\zeta_*)$ функціоналу нев'язки $F(\zeta)$ на множині $V(A^*)$, а через $V_* = \left\{\zeta(t) : \zeta \in V(A^*),\ t \in D;\ F(\zeta) = F_* = \inf_{V_0(A^*)} F(\zeta)\right\}$ – множину усіх точок мінімуму функціонала $F(\zeta)$ на області $V(A^*)$ визначення нормальних розв'язків інтегрального рівняння $A\zeta = u$. Зазначмо, що множина V_* точок мінімуму непуста і містить єдину точку, яка є *квазірозв'язком* даного рівняння.

Лема 4.2. *Розв'язок лінійного інтегрального рівняння* (4.2) *еквівалентний мінімізації функціоналу* (4.5) *на компакті* $Nu^{(1,\alpha)}(1, D)$.

Подаємо цю лему без доведення, оскільки в згаданій праці [146] подібну лему доведено для більш загального випадку на класі $St^{(1,\alpha)}(1, D) \supseteq Nu^{(1,\alpha)}(1, D)$.

Скінченновимірну апроксимацію системи (4.1) будемо здійснювати за методом *проекцій*. До речі, проектування розв'язку на відповідно підібраний підпростір[41] зменшує розмірність системи, якщо вхідна матриця симетрична і додатно визначена. За цим методом, використовуючи проектор P_m з області значень $V(A)$ в область значень $V(A_m)$ оператора (1.23$_1$), маємо

$$A_m^P(h, x) \equiv P_m\ A^P(h, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-a_m}^{a_m} \frac{h}{h^2 + (\xi - x)^2}\, \zeta_n(\xi, h, m)\, d\xi\,. \qquad (4.6_1)$$

Як зазначено у першому розділі, за умов задання правої частини $u_\delta(x)$ на *істотно короткому* відрізку наближення (4.6$_1$) не задовольняють своєю точністю через лавиноподібне накопичення похибок та повільну збіжність, навіть для “прискореного” алгоритму. У такому разі нас виручить оператор (1.25), для якого проективний вираз має вигляд

$$A_m^S(h, x) \equiv P_m\ A^S(h, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a_m}^{a_m} \left(\operatorname{ch} \frac{\pi(\xi - x)}{2h}\right)^{-1} \zeta(\xi, h, m)\, d\xi\,. \qquad (4.6_2)$$

Похибки апроксимації операторів $A(\zeta, x)$ операторами $A_m(\zeta, x)$ оцінюються як

41 В математичному аналізі доводиться справедливість проективних побудов для так званого підпростору Крилова.

$$\left\|\varepsilon^P(x,a_m)\right\|_C=\frac{1}{\pi}\left|\int_{a_m}^{\infty}\frac{h^+}{(\xi-x)^2+(h^-)^2}d\xi\right|,\quad \left\|\varepsilon^S(x,a_m)\right\|_C=\frac{1}{2\pi}\left|\int_{a_m}^{\infty}\left(\operatorname{ch}\frac{\pi(\xi-x)}{2h^+}\right)^{-1}d\xi\right|.$$

За цими виразами можна як оцінити похибку $\varepsilon(x,a_m)$ за фіксованої межі інтегрування a_m, так і знайти саму a_m за відомої міри похибки $\varepsilon(x,a_m)$. Так, наприклад, щоб похибка апроксимації не перевищувала деякої заданої величини $\max_x\left|\varepsilon^P(x,a_m)\right|\le\varepsilon_0$, потрібно у виразі (4.6$_1$) взяти таке a_m, щоб $\left\|\varepsilon^P(x,a_m)\right\|\le\varepsilon_0$. І, навпаки, в разі задання поля $U(x)$ на істотно короткому профілі $x\in[-l,l]$ за *конкретним* $a_m<l$ визначають непокращувану точність апроксимації оператора $A^S(\zeta_n,x)$. Очевидно, що за умови $\varepsilon\to 0$ межа $a_m(\varepsilon)\to\infty$, відтак $A_m(\zeta,x)\to A(\zeta,x)$.

Щоб відшукати *конкретні* значення величини a_m, потрібно, знаючи *аналітичні вирази* для похибок $\left\|\varepsilon^P(x,a_m)\right\|_C$ і $\left\|\varepsilon^S(x,a_m)\right\|_C$, розв'язати методом послідовних ітерацій окремо рівняння $\left\|\varepsilon^P(x,a_m)\right\|_C-\varepsilon_0=0$ і $\left\|\varepsilon^S(x,a_m)\right\|_C-\varepsilon_0=0$. Отже, маємо

$$\left\|\varepsilon^P(x,a_m)\right\|_C=\frac{1}{\pi}\left\|\int_{a_m}^{\infty}\frac{\zeta(\xi)}{(\xi-x)^2+\zeta^2(x)}d\xi+\int_{a_m}^{\infty}\frac{\zeta(-\xi)}{(\xi-x)^2+\zeta^2(x)}d\xi\right\|_C=\frac{2}{\pi}\left|\int_{a_m}^{\infty}\frac{h^+}{\xi^2+(h^-)^2}d\zeta\right|=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{h^+\operatorname{arctg}\frac{h^+}{a_m}-h^-\operatorname{arctg}\frac{h^-}{a_m}\right\},$$

$$\left\|\varepsilon^S(x,a_m)\right\|_C=\frac{1}{2\pi}\left|\int_{a_m}^{\infty}\left\{\frac{d\xi}{\operatorname{ch}\frac{\pi\xi}{2h^+}}+\frac{d\xi}{\operatorname{ch}\frac{\pi\xi}{2h^-}}\right\}\right|=\frac{1}{\pi}\left\{h^+\operatorname{arctg}e^{\frac{\pi a_m}{2h^+}}+h^-\operatorname{arctg}e^{\frac{\pi a_m}{2h^-}}\right\}.$$

Звідси $h^+\operatorname{arctg}\frac{h^+}{a_m}-h^-\operatorname{arctg}\frac{h^-}{a_m}-\varepsilon_0=0$ і $h^+\operatorname{arctg}e^{\frac{\pi a_m}{2h^+}}+h^-\operatorname{arctg}e^{\frac{\pi a_m}{2h^-}}-\varepsilon_0=0$, відповідно. В такому разі $a_m=\lim_{n\to\infty}\{\alpha_n\}$, де α_n для першого з рівнянь отримуємо з ітерацій виду

$$\alpha_{n+1}=\alpha_n+h^+\operatorname{arctg}\frac{h^+}{\alpha_n}-h^-\operatorname{arctg}\frac{h^-}{\alpha_n}-\varepsilon_0,\quad \alpha_0=\frac{2\varepsilon_0}{(h^+)^2+(h^-)^2},$$

для другого – з процесу $\alpha_{n+1}=\alpha_n+h^+\operatorname{arctg}e^{\frac{\pi\alpha_n}{2h^+}}+h^-\operatorname{arctg}e^{\frac{\pi\alpha_n}{2h^-}}-\varepsilon_0$, $\alpha_0=\frac{1}{h^+}\frac{\varepsilon_0}{(h^+)^2+(h^-)^2}$. Вже з вигляду початкових наближень α_0 бачимо, що за інших рівних умов для відновлення контакту при *однаковій заданій точності* ε_0 обчислень оператора $A(\zeta,x)$ за алгоритмом (1.25) потрібно значно меншу величину інтервалу a_m, ніж за алгоритмом (1.23$_1$). Конкретно, для модельних задач $h^-=-1.6$, $h^+=-1.4$ і довжина інтервалу a_m для згаданих алгоритмів у *нормованому* вигляді відповідно співвідноситься, як 0.36 до 1. Якщо ж відновити за цими алгоритмами контакт за полем, заданим на *профілях однакової довжини*, скажімо, $l\in[-1,1]$, то точність двох його варіацій буде істотно відрізнятись, і навіть на більшу величину, ніж згадана пропорція для a_m.

Збудувавши таким способом оператори $A_m^P(\zeta_n,x)$ і $A_m^S(\zeta_n,x)$ для будь-якого з

розроблених ітераційних процесів і обравши для обчислень відповідних інтегралів формулу Гауса 7-го ступеню точності (12 вузлів), без перешкод проектуємо неперервні послідовні наближення (4.5) розв'язку в об'єкти скінченновимірних просторів, що стануть підвалинами для побудови регуляризуючих алгоритмів. Це остаточно завершує чисельну підготовку алгоритмів для реалізації на комп'ютері.

В ході чисельного моделювання вважаємо, що поле $U(x)$ і контакт $\zeta(x)$ задано на обмежених відрізках, що містять інтервал $[-a_m, a_m]$ як власну підмножину на мережі рівномірно розподілених пунктів профілю. Для зручності обчислень розмістимо відрізок $[-a_m, a_m]$ так, щоб вузли інтегрування функції $\zeta(x)$ співпадали з точками задання поля $U(x)$. За такого припущення середня точка $\bar{\zeta}_n = (x_n + x_{n+1})/2$, $n = 1{,}2k-1$ інтервалу $[-a_m, a_m]$ є вузлом інтегрування. Оскільки крок мережі $[x_n, x_{n+1}]$ постійний, то плаваючою має бути межа інтегрування. Визначивши її, як вказано вище, отримуємо кількість $M = \mathrm{Int}(2a_m/\Delta x)$ кроків Δx мережі на інтервалі $[-a_m, a_m]$. В разі, якщо число M непарне, залишаємо межу a_m, в іншому разі задаємо межу $a_m + \Delta x/2$.

В процесі апроксимації операторів (4.6$_i$) очевидно, що

$$A_m^*(h, x) = A(h, x) + \varepsilon(x, a_m) + \varepsilon(x, n),$$

де $\varepsilon(x, a_m)$ – вже згадана похибка скінченновимірної апроксимації операторів а $\varepsilon(x, n)$ – точність інтегральної квадратури. Подібні міркування справедливі і для узагальнених аналогів виразів (4.6$_i$). Це означає наявність і в операторах, і в правих частинах невідомих складових $\varepsilon(x, a_m)$ і $\varepsilon(x, n)$, одначе, на практиці такими похибками в правих часинах нехтують, вирішуючи урізані системи. Як наслідок з вищевикладеного, в найбільш загальному вигляді по завершенню дискретизації оператора $A_m(\zeta^{\alpha_0}; x, \varepsilon)$ отримуємо відносно шуканого вектора розв'язку $\vec{\zeta}(x_n)_{n=1}^m$ такі системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{j=1}^{m}\left\{\zeta(x_j) - \frac{\Delta x}{\pi}\sum_{i=1}^{2n-1}\gamma_i \frac{\zeta(x_j)}{(\xi_i - x_j)^2 + \zeta^2(\xi_i)}\right\} = \sum_{j=1}^{m}\{u(x_j) + \varepsilon(x_j, a_m) + \varepsilon(x_j, n)\},$$

$$\sum_{j=1}^{m}\left\{\zeta(x_j) - \frac{\Delta x}{2\pi}\sum_{i=1}^{2n-1}\gamma_i\left(\mathrm{ch}\frac{\pi(\xi_i - x_j)}{2\zeta(x_j)}\right)^{-1}\right\} = \sum_{j=1}^{m}\{u(x_j) + \varepsilon(x_j, a_m) + \varepsilon(x_j, n)\},$$

де γ_i – ваговий коефіцієнт квадратурної формули інтегрування Гауса. Звідси нескладно отримати урізані системи лінійних рівнянь

$$\sum_{i=1}^{2n-1}\zeta(x_i) - \frac{\Delta x}{\pi}\sum_{i=1}^{2n-1}\gamma_i\sum_{j=1}^{m}\frac{\zeta(x_i)}{\zeta^2(x_i) + (\xi_j - x_i)^2}\zeta(\xi_j) = \sum_{j=1}^{m}u(x_i),$$

$$\sum_{i=1}^{2n-2}\zeta(x_i) - \frac{\Delta x}{2\pi}\sum_{i=1}^{2n-1}\gamma_i\sum_{j=1}^{m}\left(\mathrm{ch}\frac{\pi(\xi_j - x_i)}{2\zeta(x_i)}\right)^{-1}\zeta(\xi_j) = \sum_{j=1}^{m}u(x_i), \qquad (4.7)$$

в правих частинах яких відсутні складові $\varepsilon(x_i, a_m) + \varepsilon(x_i, n)$. В той же час вони входять в ліві частини, тобто функції $\zeta(x_i)$ залежать від величини m межі інтегрування a_m та від густини n

мережі на інтервалі $[-a_m, a_m]$. Власне, ми приймаємо деяке значення $\zeta_l(x_n, n, m)$ за наближення $\zeta(x_i)$ точного розв'язку $\zeta(x)$ у вузлі x_n, оминаючи обґрунтування збіжності послідовних дискретних наближень. Власне, збіжність наближень $\zeta_l(x_n, n, m)$ системи (4.7) до точних розв'язків $\zeta(x)$ цих рівнянь можна охарактеризувати, оцінивши ступінь близькості функцій $\zeta(x)$ і $\zeta(x_m; n, l)$ в модулях їх неперервності $\omega(\zeta, \delta)$. Лишаючи це поза рамками даної роботи, скажемо лише, що при тестовому моделюванні задавалась така схема інтегрування, що мало місце відношення $\|\varepsilon^P(x, a_m)\| + \|\varepsilon(x, n)\| \le N\delta$, де N залежить від довжини профілю та похибок поля.

Вплив похибок чисельного інтегрування можна нівелювати за схемою, застосованою у праці [142]. Для цього із залежності відносної похибки $\delta u(x, N)$ інтегрування від числа N його вузлів[42]. визначають ефективну густину вузлів інтегрування, яка забезпечує високу точність інтегрування. Під відносною похибкою розуміють такі величини

$$\delta u(x, N) = \int_{-1}^{1} \frac{\alpha}{(\xi - x)^2 + \zeta^2(\xi)} d\xi - \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} \frac{\alpha}{(\xi_i - x) + \zeta^2(\xi_i)},$$

$$\delta u(x, N) = \int_{-1}^{1} \left(\operatorname{ch}\frac{\pi(\xi - x)}{2\alpha} \right)^{-1} d\xi - \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} \left(\operatorname{ch}\frac{\pi(\xi_i - x)}{2\zeta(\xi_i)} \right)^{-1},$$

а модельний контакт обчислюють з виразу (4.16).

***Зауваження* 4.3.** Якщо вихідна модель містить систематичні похибки, то *наближення в середньому* $\|\zeta(x)\|_C$ не забезпечить оптимальних розв'язків; *рівномірне наближення* $\|\zeta(x)\|_{L_2}$ продукує розв'язки, максимально схожі на вихідну модель.

4.3. ПОБУДОВА РЕГУЛЯРИЗУЮЧИХ АЛГОРИТМІВ

Регуляризація некоректно поставленої задачі (4.1) означає знаходження стійких наближених її розв'язків, узгоджених із апріорною інформацією про властивості перешкод у вхідних даних та розв'язках. Загальна стратегія вирішення таких задач керується принципом регуляризації А.М. Тихонова. Для функцій $u(x) \in L_2$, $\zeta(\xi) \in W_2^1$, таких, що $\|u_\delta(x) - u(x)\|_{L_2} \le \delta$, $\|K_\delta(x, \xi) - K(x, \xi)\| \le \varepsilon$, вводять згладжувальний функціонал (4.5), в якому основною проблемою є визначення стабілізуючого функціонала $\Omega(\zeta)$.

4.3.1. Підхід Тихонова. Суть підходу Тихонова щодо задачі (4.2) така: задають деякий стабілізатор $\Omega(\zeta)$ – неперервний невід'ємний випуклий функціонал, що сягає точної нижньої грані на множині $Nu^{(1,\alpha)}(1, D)$, а розв'язок задачі (4.2) обирають як таке *наближення* $\zeta(x, m, \delta) = \arg\inf\{\Omega(\zeta) : \|A_m(\zeta; x) - u_\delta(x)\| \le \Delta\}$, *яке мінімізує стабілізатор* $\Omega(\zeta)$ *за умови*

---

42 Чисельну стійкість розв`язків, згідно [111, с. 21], забезпечує мінімізація нев`язки за нормою L_2 за умови ортогональності вектора згладжених значень поля і вектора нев`язки.

$\left\| A_m(\zeta, x) - u_\delta \right\|_{L_2} \le \Delta$ і відомої міри похибки $\delta = \left\| \delta u(x) \right\|_{L_2}$ задання функції $u_\delta(x) = u(x) + \delta u(x)$.

За таких умов задача (4.2) редукується до задачі на безумовний мінімум згладжувального функціонала Тихонова: $T^\alpha(\zeta; u; \delta) = \left\| A_m(\zeta; x) - u_\delta(x) \right\|^2_{L_2} + \alpha\Omega(\zeta)$, або в інтегральному вигляді

$$T^\alpha(\zeta; u; \delta) = \int_{c_0}^{c_3} [A_m(\zeta; x) - u_\delta(x)]^2 + \alpha\Omega(\zeta), \qquad (4.8)$$

а параметр регуляризації α визначають із екстремалі $\zeta(x, m, \alpha_0, \delta)$ послідовності $\{\zeta(x, m, \alpha_0, \delta)\}$, яка задовольняє умові нев'язки $\left\| A_m(\zeta^{\alpha_0}; x) - u_\delta(x) \right\|_{L_2} \le \Delta_0$. Наприклад, стосовно другого з рівнянь (4.7), остання умова набуває вигляду

$$l \cong \arg\min_l \left\| u_\delta(x_i) - \frac{\Delta x}{2\pi} \sum_{i=1}^{2n-1} \gamma_i \sum_{j=1}^{m} \left(\operatorname{ch} \frac{\pi(\xi_j - x_i)}{2\zeta(x_i, n, m)} \right)^{-1} \zeta_l^\alpha(\xi_j, n, m) \right\|,$$

а додатковим параметром регуляризації є номер ітерації.

***Зауваження* 4.4.** Умовно коректні задачі мінімізації нев'язки розв'язують ітераційно, фіксуючи апріорні поправки на кожному кроці ітерації; за відповідного вибору кількості ітерацій (залежного від вхідної інформації) будь-який метод ітерацій стане регуляризуючим[43].

Для побудови конкретних регуляризуючих алгоритмів необхідно лише конкретизувати вигляд стабілізатора $\Omega(\zeta)$ в (4.8) залежно від властивостей шуканого розв'язку і перешкод. Відбір за мінімумом нев'язки слід доповнити обмеженнями на варіацію розв'язків чи відношеннями переваги, що допоможе вирізнити змістовний розв'язок задачі.

Мінімізація рівняння (4.8) призводить до розв'язання певного рівняння Ейлера $gradT^\alpha[\zeta, u_\delta, \delta] = 0$ [93, 143-146] з добутком матриць[44], збурених похибками

$$\left(\tilde{A}^* \tilde{A} + \alpha E \right) \zeta = \tilde{A}^* u_\delta, \qquad (4.9_1)$$

та вибором параметра α з умови нев'язки. Для інтегрального рівняння 1-го роду маємо:

$$\alpha\Omega(t) + \int_{c_0}^{c_3} \left[\int_{c_1}^{c_2} K_\delta(x,t) K_\delta(x,\xi) dx \right] \zeta_\alpha(\xi) d\xi = \int_{c_1}^{c_2} K_\delta(x,t) u_\delta(x) dx, \ c_0 \le t \le c_3, \qquad (4.9_2)$$

тобто замість некоректного рівняння 1-го роду (4.1) вирішуємо рівняння 2-го роду (4.9_2). Обумовленість системи (4.9_1) гірша від початкової (4.2). Якщо до вирішення даної системи застосувати алгоритм розв'язку погано обумовлених систем з побудовою лівого оберненого оператора A_l^{-1} і виділити індукований оператор A_r, що співпадає із початковим A так, що $A_l^{-1} A = E$, як це зроблено в [144, 147], то рівняння Ейлера (4.9_1) набуде вигляду

---

[43] Згідно думки, висловленої у статті: *Бакушинский А.Б., Гончарский А.В., Степанов Л.Д.* Применение алгоритмов итерационной регуляризации для решения обратных задач гравиметрии // Физика Земли. – 1986. – №10. – с. 43-50.

[44] У [119] пропонується при розв`язанні рівняння Ейлера взагалі уникати операції перемноження матриць, замінюючи її перемноженням матриці на спеціальні вектори.

$$A^* \left\{ [A+\alpha\left(A_l^{-1}\right)^*]\zeta - u_\delta \right\} = 0, \qquad (4.9_3)$$

звідки за відповідного вибору параметра α отримаємо шуканий розв’язок

$$\zeta_{opt} = \left[A+\alpha\left(A_l^{-1}\right)^*\right]^{-1} u_\delta. \qquad (4.10_1)$$

Одначе, на етапі заміни збуреного оператора A індукованим A_r відносно збурення $_\Delta A$ можна запропонувати вигідніший алгоритм. Дійсно, якщо збурення не переважає заданого порогу (4.3[1]), то єдиний у множині *допустимих розв’язків* $Z(A,u_\delta)=\left\{\zeta : \zeta = \bar{\zeta} + A_l^{-1}\,\delta\right\}$ нормальний розв’язок $\zeta = A_l^{-1}\,u_\delta = \bar{\zeta} + A_l^{-1}\,\delta$ можна обрати з умови $\min\|\zeta(\delta)\|_E$. Такий хід зводить задачу (4.8) до безумовної мінімізації функціоналу $\Phi(\delta)=\|\zeta(\delta)\|_E^2 + \delta^2/\alpha$ на множині $Z(A,u_\delta)$ за фіксованого α. Мінімум досягається на певній екстремалі $-\alpha_0\left(A_l^{-1}\right)^*\zeta = \delta$ розв’язку *рівняння Ейлера* $grad\Phi(\delta)=2\left(A_l^{-1}\right)^*\zeta + \delta/2\alpha$ за деякого оптимального параметра регуляризації $\alpha_0 = \delta \Big/ \left\|\left(A_l^{-1}\right)^* A_l^{-1}\,u_\delta\right\|_E$. Підсумовуючи сказане, дійдемо висновку, що єдиний *нормальний розв’язок* $\zeta^{(0)} \in Z(A,u_\delta)$ визначається через мінімізацію функціоналу

$$F\left(\zeta^{(0)}\right) = \min_{x\in R^n}\left\|\left(A+\alpha_0\left(A_l^{-1}\right)^*\right)\zeta - u_\delta\right\|_E$$

у вигляді:

$$\zeta^{(0)} = \left[A_r + \alpha_0\left(A_l^{-1}\right)^*\right]_l^{-1} u_\delta. \qquad (4.10_2)$$

Цей алгоритм, попри подібність до регуляризучого алгоритму Тихонова для сумісних систем (4.10[1]), має практичні переваги:

а) на порядок меншу обумовленість рівняння Ейлера, тобто більшу стійкість до різноманітних похибок;

б) простоту визначення параметра α_0, в той час як в алгоритмі Тихонова для цього необхідно розв’язувати нелінійне рівняння “нев’язки”.

Загалом побудова стійкого наближення нормального розв’язку інтегрального рівняння Фредгольма 1-го роду із симетричним додатно визначеним ядром у рівномірній метриці означає вирішення такої задачі:

за заданими наближеннями ядра $K_\varepsilon(x,\xi)$ і правої частини $u_\delta(x)$ у просторі C, такими, що $\max\limits_{0\le x,\xi\le 1}|K_\varepsilon(x,\xi)-K(x,\xi)|\le\varepsilon$, $\max\limits_{0\le x\le 1}|u_\delta(x)-u(x)|\le\delta$ знайти за довільних величин $\delta\in[0,\delta_0]$, $\varepsilon=[0,\varepsilon_0]$ стійке наближення *нормального розв’язку* $\zeta^{(0)}(x)\in C[0,1]$, тобто таку функцію $\zeta_{\delta\varepsilon}(x)$, що $\left\|\zeta_{\delta\varepsilon}-\zeta^{(0)}\right\|_C \to 0$ при $\delta,\varepsilon\to 0$.

Ще в [142] відзначено, що традиційний стабілізатор виду $\Omega(\zeta)=\|\zeta-\zeta_0\|_{L_2}^2$ не є оптимальним для задач такого типу. З усіх можливих розв’язків задачі (4.2) на класі $Nu^{(1,\alpha)}(1,D)$, які задовольняють із точністю δ спостереженому полю $u(x)$, краще обрати такий, що мінімізує функціонал

$$\Omega(\zeta)=\int_{c_1}^{c_2}\left\{p(x)\zeta^2(\xi,x)+q(x)[D\zeta(\xi,x)]^2\right\}dx \to \min,$$

який характеризує ступінь гладкості розв’язку (значення похідної прямо йому пропорційне). Тут D – оператор диференціювання, а $p(x)\geq p_0>0$ і $q(x)\geq q_0>0$ – задані неперервні функції. Проте мінімізація функціоналу $\Omega(\zeta)$ генерує границі зі згладженим рельєфом, тому за цим принципом неможливо відновити малі деталі рельєфу контакту, вплив яких у сумарному полі співставний із точністю поля δ. У межах класу єдиності $Nu^{(1,\alpha)}(1,D)$ за критерієм гладкості розв’язку $\Omega(\zeta)$ обирають такий об’єкт, обчислене поле від якого ухиляється від спостереженого на величину нев’язки Δ. Цей критерій забезпечує стійкість розв’язку, а критерій $\Omega(\zeta)=\sup_x\left|A[\zeta(x)-\zeta(\xi)]\right|\to\min$ – його єдиність. Така загальна стратегія побудови стійких чисельних розв’язків задачі (4.2). Обмежимось частинним виглядом стабілізатора із $p(x)=q(x)=1$. В такому разі $\operatorname{grad}\Omega(\zeta)=\zeta(x)+D^*D\zeta(x)$ і, отже, від вираз (4.8) перетворюється до

$$\{A''_m(\zeta)\}^*\left(A(\zeta,x)+A'(\zeta)\zeta(x,n,m)+\alpha^*\left(E_n+D_n^*D_n\right)\zeta^{\alpha}_{n+1}(x,n,m)\right)=u_\delta(x,n,m)+\varepsilon(x,n,m)\quad(4.11_1)$$

в операторному вигляді, або до

$$\alpha\left(1+\int_{c_0}^{c_3}\zeta^2_\alpha(\xi)d\xi\right)+\int_{c_0}^{c_3}\left[\int_{c_1}^{c_2}K_\delta(x,t)K_\delta(x,\xi)dx\right](1+\zeta_\alpha(\xi))d\xi=\int_{c_1}^{c_2}K_\delta(x,t)(u_\delta(x)+\varepsilon(x))dx\quad(4.11_2)$$

в інтегральному вигляді. Здійснивши скінченновимірну апроксимацію цього рівняння (дискретний вигляд кожної складової), отримаємо чисельні схеми для конкретних алгоритмів.

4.3.2. Регуляризуючі алгоритми визначення контакту. При розв’язанні оберненої задачі для контакту $\zeta(x)$ за методом Тихонова на випадок задання поля на істотно короткому інтервалі $(-l,l)$, $l<\infty$ мусимо обмежитись фіксованою межею a_m, варіюючи похибкою апроксимації оператора.

Для усунення великих похибок вимірів у вхідних даних скористаймось процедурами згладження поля на дискретній мережі точок за умови, що земний рельєф добре апроксимується прямою, яка не перетинає “нижньої” границі тяжіючого шару. Задача згладження вхідних даних формулюється таким чином:

визначити за наближено заданим на осі $R^{(1)}$ значенням поля $u_\delta(x)$ з точно оціненою похибкою $\|\delta u(x)\|\leq\delta>0$ в $L^{(2)}\left(R^{(1)}\right)$ його гладке наближення $u^{(s)}(x)$, яке задовольняє умові $\left\|v(x)-u^{(s)}(x)\right\|=\varepsilon,\ u^{(s)}(x)\in H(\Omega,c)$, де $H(\Omega,c)$ – скінченновимірний компакт.

Згідно [140, с. 177], згладжені значення поля можна отримати з формули

$$u^{(s)}(x,\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u_\delta(\omega)e^{i\omega x}}{1+\alpha\left(1+\theta^2\ \omega^2\right)}d\omega\,,\ u_\delta(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}u_\delta(x)e^{-i\omega x}dx\quad(4.12)$$

де α – параметр регуляризації, отриманий з умови $\{\alpha_i:\alpha_i=\theta_{i-1},\ 0<\theta<1\}$.

Розгляньмо окремі приклади прямих операторів для застосування в методі

регуляризації.

1. Розв'язок задачі (4.2) для наближень $v_\delta(x)$ поля $v(x)=u(x)-h$, заданих на майже нескінченному профілі (на осі $R^{(1)}$) будуймо за умови, що проведено згладження спостережень за правилом (4.12) де α_n – оптимальне значення параметра регуляризації. А ні вираз

$$\zeta_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}\zeta_{n-1}(\xi)d\xi,$$

а ні його образ Фур'є $\zeta_n(\omega)=\zeta_{n-1}(\omega)e^{-|\omega|h}=v(\omega)e^{|\omega|h}-\zeta_{n-1}(\omega)$, $v(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}v(x)e^{-i\omega x}dx$ не придатні для обчислень через сильну нестійкість, однак їх можна використати як критерій адекватності орієнтації процесу регуляризації розв'язку. Оптимальний образ наближення шукатимемо з формул

$$\zeta_n(x_i)\approx\frac{\Delta x}{\pi}\sum_{k=1}^{m}\frac{h}{h^2+(\xi_k-x_i)^2}\zeta_{n-1}(\xi_k)-v(x_i). \qquad (4.13)$$

Віднайшовши n-не оптимальне наближення образу $\zeta_n(\omega)$ контакту, обчислюємо поріг $\Delta v_n(\omega)$ і порівнюємо його з похибками вхідних даних. Якщо $\Delta v_n(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\left|v(\omega)+\zeta_n(\omega)e^{-|\omega|h}\right|d\omega\le(n-1)\delta^2$, то n-не оптимальне наближення $\zeta_n(x)=$ $=(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\zeta_n(\omega)e^{i\omega x}d\omega$ є остаточним розв'язком задачі, в іншому разі шукаємо наступне $n+1$-ше наближення за означеною схемою.

2. Розв'язок задачі (4.2) визначення контакту на основі інтегрального рівняння (1.39) зі швидкоспадаючим ядром Шварца введемо із таких міркувань. Поряд із наближенням $\zeta_n^-(x)$ контакту $\zeta(x)$ розгляньмо симетричне щодо осі Ox фіктивне наближення контакту

$$\zeta_n^+(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}v^{(n)}(\xi)d\xi.$$

Їх образи визначають у вигляді $\zeta_n^+(\omega)=v^{(n)}(\omega)e^{-|\omega|h}$, $\zeta_n^-(\omega)=v^{(n)}(\omega)e^{|\omega|h}$, і, отже,

$$v^{(n)}(x)=\frac{1}{4h}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\operatorname{ch}\frac{\pi(\xi-x)}{2h}\right)^{-1}\zeta_n^-(\xi)d\xi+\frac{1}{4h}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\operatorname{ch}\frac{\pi(\xi-x)}{2h}\right)^{-1}\zeta_n^+(\xi)d\xi.$$

Вводячи позначення

$$W^{(n)}(x;h)=v^{(n)}(x)-\frac{1}{4h}\int_{-\infty}^{\infty}K_1(x;h)v^{(n)}(\xi)d\xi,\ K_1(x;h)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\operatorname{ch}\frac{\pi(\xi-x)}{2h}\right)^{-1}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}d\xi,$$

бачимо, що ядро цього перетворення спадає на нескінченності швидше за ядро Пуассона (рис. 1.6). Через це доцільно практично обчислювати контакти із такої послідовності:

$$\int_{-\infty}^{\infty}K_0(x;h)\zeta_n^-(\xi)d\xi=W^{(n)}(x;h),\ m=\overline{0,\infty},\ \zeta_0^-(x)=0,\ K_0(x;h)=\frac{1}{4h}\left(\operatorname{ch}\frac{\pi(\xi-x)}{2h}\right)^{-1},$$

$$v^{(1)}(x)=u(x)-h,\ \int_{-\infty}^{\infty}[u(x)-h]dx=0. \qquad (4.14)$$

Для реалізації цього методу застосовують квадратурні формули чисельного інтегрування швидко осцилюючих функцій на кшталт (1.33_1) на скінченному інтервалі $[-a_m, a_m]$ рівномірної мережі точок x_M з постійним кроком Δx, обраному з тих же міркувань, що і для системи (4.7), тобто похибка апроксимації задовольняє умові $\|\varepsilon(x,n)\|_C$ + $\|\varepsilon(x,l)\|_C \le N\delta$. У випадку відновлення контакту за схемою (1.38) з комбінованим ядром застосовують інший чисельний алгоритм.

3. Наостанку, згідно *зауваження* 3.2, доведемо чисельну збіжність наближень $\{S^-(x,h)\}$ другого рівняння системи (1.30). Попередньо відзначмо, що швидкість їх збіжності удвічі більша, ніж для наближень $\{S^+(x,h)\}$ першого рівняння Чисельне моделювання на вищеописаній мережі точок x_M доводить збіжність наближень $\{S^-(x,h)\}$ при заданій точності $\delta = 10^{-5}$, $\varepsilon = 10^{-11}$, про що свідчить табл. 4.1 (“точне” значення $S^-(x_m,1)$ отримане при $n = 999$). Наочно ці ж результати представляє рис. 4.1.

Таблиця 4.1. Тестування чисельної збіжності для функції $S^-(x_m,1)$ системи (1.30).

x_m	$S^-(x_m,1)$ точне	$S_2^-(x_m,1)$, $n=10$	$S_3^-(x_m,1)$, $n=20$	$S_4^-(x_m,1)$, $n=50$	$S_5^-(x_m,1)$, $n=99$
0.0	0,320980885755	0,330953400228	0,332708847142	0,331711595695	0,330714344247
0.54	0,360505742443	0,285070338224	0,291783237860	0,299326778282	0,306870318704
1.08	0,229860847903	0,240069015239	0,234947978651	0,233927161917	0,232906345184
1.63	0,121878768156	0,182278132699	0,174381139293	0,168341202838	0,162301266384
2.17	0,087821430222	0,128729532646	0,120245665661	0,11615485541	0,112064045176
2.71	0,073960202835	0,070666821176	0,078238856226	0,078568194392	0,078897532558
3.25	0,084162373624	0,046573380922	0,049456182576	0,053215081846	0,056973981117
3.79	0,086138811671	0,034953283516	0,031872632028	0,036991184844	0,042109737659
4.34	0,074944057015	0,027554630921	0,022237576974	0,026976519583	0,031715462193
4.88	0,054495252183	0,020783820159	0,017483044536	0,020854187738	0,024225330941
5,42	0,033604289058	0,017030710462	0,015364301382	0,017021659242	0,018679017101
5,97	0,010513332564	0,010702361987	0,014509934235	0,014491031292	0,014472128350
6,51	-0,008421986598	0,010702361987	0,014197711668	0,012705488873	0,011213266075
7,06	-0,058381827651	0.010002178i512	0,014094187333	0,011367994416	0,008641801498
7.59	-0,028087884748	0,009329083596	0,014063014609	0,010321317775	0,006579620941
8.00	-0,036088488457	0,007736079975	0,014055677263	0,009673220419	0,005290763576

Примітка: $S_i^-(x_m,1)$, $i = 1{,}5$ – значення функції $S_i^-(x_m)$ за різної кількості ітерацій n.

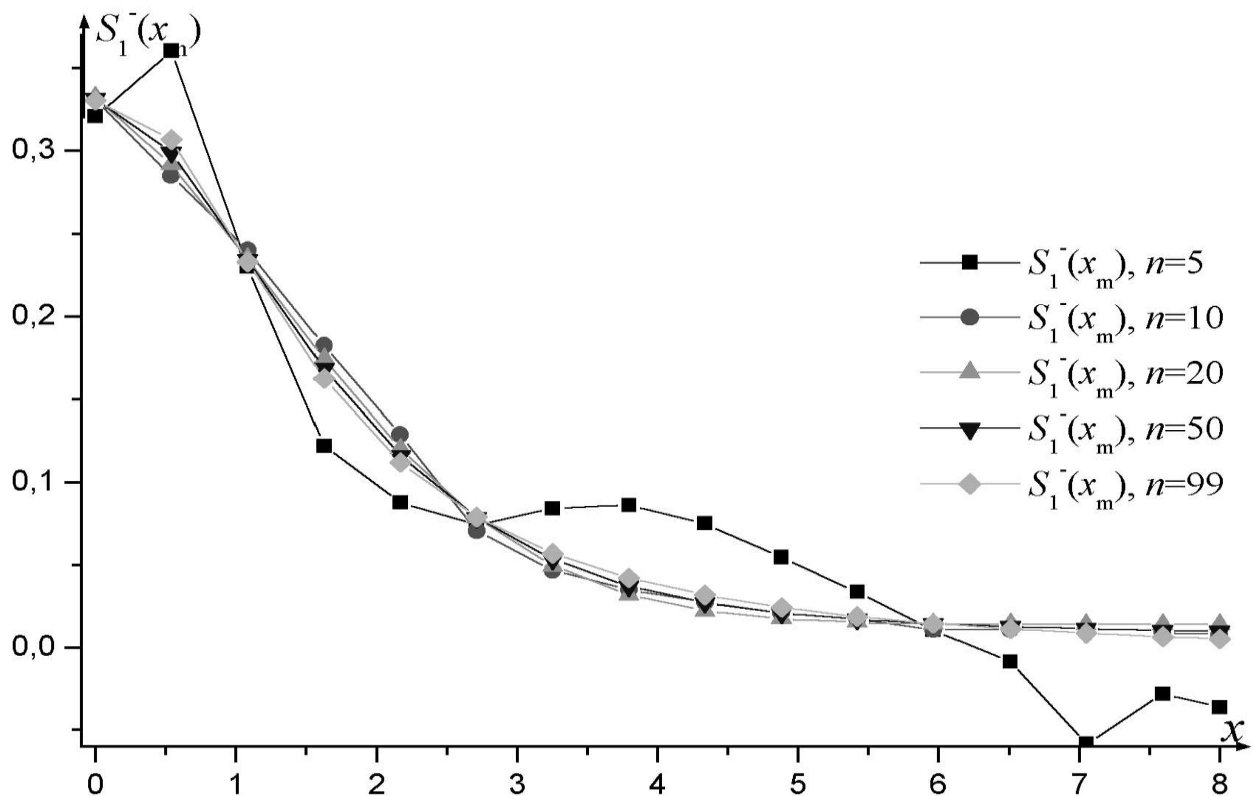


Рис. 4.1. Ілюстрація чисельної збіжності функції $S_i^-\left(x_m\right)$ системи (1.30).

Ітерації в обчислювальній схемі провадять до межі заданої точності, одночасно зменшуючи їх кількість, щоб уникнути накопичення похибок округлень. Методи боротьби з похибками округлення у сучасному чисельному аналізі поділяють на зовнішні (розрахунок шуканої функції та послідовне збільшення точності за рахунок зменшення норм похибок[45] і т.п.) та внутрішні, властиві конструкції самого методу (відновлення втраченої точності кожної операції на кожному кроці ітерації). Останній клас повніше враховує наявну інформацію і претендує на вище місце в ієрархії стійких *нелінійних чисельних методів*.

Найбільш вдалим методом цього класу, на нашу думку, є метод чисельної дорегуляризації Чорного [145]. Цей метод передбачає відшукання *проекції розв'язку* ζ_r *на підпростір* E_r *простору* $E_n, r \le n$ *мінімальних розв'язків, натягнених на власні вектори, що відповідають власним значенням, за модулем більшим за збуренням матриці* $\left|\lambda_i\right| > \varepsilon$. Означений метод придатний навіть для регуляризації погано обумовлених систем лінійних рівнянь. Регуляризація останніх має на меті побудову нової системи, $\left|\Delta A\right| \ge \varepsilon$, еквівалентної за спектром початковій, з визначником, що практично відрізняється від нуля. Всередині алгоритму з початкової матриці видаляють *майже нульові* і *майже лінійно залежні* стовпці

45 Визначають похибки елементарних операцій з урахуванням округлення, похибок самих ітерацій, систематичних та ін., згодом – сумарну похибку для кожної формули алгоритму і загальну; останню порівнюють з нормою заданої точності – при її перевищенні погіршується точність методу.

(строки) за простим критерієм (відношення між модулем відповідного стовпця чи їх лінійної комбінації і відомою величиною похибки вхідних даних). Симетрична матриця нової еквівалентної системи є добутком лівої трикутної матриці на транспоновану до неї; трикутну матрицю легко обернути, тому неважко розв'язати деяку систему $\widehat{A}_r = B\,B^T$, $\widehat{\zeta}_r = \left(B^{-1}\right)^T B^{-1}\,\widehat{Y}_r$. Такий розв'язок буде точним лише для систем невисокого порядку, оскільки при обчисленні елементів матриць B в B^{-1} накопичуються похибки округлень. Їх вплив зменшують за допомогою дорегуляризації на основі властивості *ортогональності векторів базису* e_i (суть послідовних операцій, до яких зводиться ця процедура, описано в коментарі).

4.4. ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОНТАКТІВ

4.4.1. Чисельна схема. Дієздатність алгоритмів забезпечує сукупність дискретно заданої вхідної інформації $\aleph$, описаної в п. 1.3.2. Вся вхідна інформація записується в файл і доступна для редагування. Вважається, що перед вирішенням прямої задачі виконано попередню обробку (редукції, фільтрація, врахування фону, масштабування, тощо) для узгодження польових даних з ідеалізованими вимогами математичної моделі задачі за допомогою відповідних сервісних програм.

В силу міркувань про вирішення урізаних систем в ході чисельного моделювання зупинимось на рівнянні типу (4.9₂)

$$\alpha\zeta_\alpha(t) + \int_{c_0}^{c_3}\left[\int_{c_1}^{c_2} K_\delta(x,t)K_\delta(x,\xi)dx\right]\zeta_\alpha(\xi)d\xi = \int_{c_1}^{c_2} K_\delta(x,t)u_\delta(x)dx,\ \ c_0 \le t \le c_3 .$$

Вибір мережі вузлів описано на початку розділу, а параметр регуляризації α в тестовому режимі оберемо на основі залежності $\alpha = C\delta^2$, де $C = \sum_{i=0}^{5} 10^{-i}$ (еквівалентно вибору α за правилом $\alpha_{i+1} = \theta\alpha_i$, $i = 0,1,2,...,\ 0 < \theta < 1$). Це зумовлено не лише спрощенням обчислень, але і тим, що можна так задати константу $C > 0$, що за малих значень δ забезпечується менша похибка розв'язку $\zeta_\alpha(x_i)$, ніж при виборі α за нев'язкою. Дискретний аналог вищенаведеного рівняння Ейлера виглядає

$$\alpha\sum_{k=1}^{n-1}\zeta(x_k) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\gamma(x_i)K_\delta(x_i,\xi_k)K_\delta(x_i,\xi_j)\zeta(\xi_j) = \sum_{i=1}^{n}\gamma_i K_\delta(x_i,\xi_k)u_\delta(x_i) \qquad (4.15)$$

за умов застосування квадратур Гауса $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n}\gamma_i f(x_i) + R(f_n)$. Залишковий член $R(f_n) = \int_{c_0}^{c_3} f(x)dx - \sum_{i=1}^{n}\gamma_i f(x_i)$, як відомо, має смисл *похибки наближеного інтегрування* і оцінюється величиною $R(f_n) = \dfrac{2^{2n+1}}{(2n+1)(2n)!}\left[\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}\right]^2 f^{(2n)}(\eta),\ -1 < \eta < 1$. Для переходу від

інтеграла $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ до інтеграла з довільними межами використано відоме співвідношення $\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k \alpha f(\alpha x_k + \beta)$. Ми обрали для обчислень кратних інтегралів формулу з пропущеними вузлами

$$\int_a^b\int_c^d f(x,\xi)dxd\xi = \alpha\gamma\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_j b_i \{f(\beta+\alpha x_j, \delta+\gamma x_i) + f(\beta-\alpha x_j, \delta+\gamma x_i) + f(\beta+\alpha x_j, \delta-\gamma x_i) +$$

$+ f(\beta-\alpha x_j, \delta-\gamma x_i)\}$, де $\alpha = \frac{b-a}{2}$, $\beta = \frac{b+a}{2}$, $\gamma = \frac{d-c}{2}$, $\delta = \frac{d+c}{2}$ для $n=2$-мірного куба і, отже, $R(f_n) = f^{(4)}/135$. Забігаючи наперед, скажемо, що в ході обчислень на інтервалі $[-1,1]$ отримано $R(f_n) \approx 1{,}1\cdot 10^{-6}$. Рівняння (4.15) складає систему лінійних рівнянь з додатною визначеною симетричною матрицею[46]. Розв'язуючи цю систему для ряду значень $\alpha = C\delta^2$, $C = \sum_{i=0}^{5} 10^{-i}$, знаходимо шуканий розв'язок $\zeta_{\alpha_i}(x_k)_{k=1}^{m}$. Оптимізація розв'язків із знаходженням α_{opt} для модельних прикладів не проводилась. Модельне поле, яке фігурує в правій частині всіх алгоритмів, отримане шляхом розв'язання прямої задачі, тобто визначення поля від модельного контакту типу Іванова (рис. 4.2.):

$$\zeta(x_i) = \begin{cases} h_1 + \sum_{i=1}^{n}\left\{a(1-x_i^2)^2 + b\sin k\pi x_i\right\}, & i \in [c_0, c_3] \\ h_1, & i \notin [c_0, c_3] \end{cases}. \tag{4.16}$$

Значення отриманого поля, збурені 5%-ним шумом, служать вхідними даними в алгоритмах комп'ютерного обчислення оберненої задачі за виразом (4.7). Загалом чисельні алгоритми містять такі кроки:

1°. введення вхідних даних $l, n, k_d, a, b, \varphi, h_1, k$, значень поля g_i та розрахунок додаткових параметрів чисельної схеми $m, m_g, \Delta x, \Delta\zeta$;

2°. вирішення прямої задачі – визначення теоретичного поля, генерованого модельним контактом (4.16), за формулою

$$u(x_i) = \sum_{i=1}^{2n-1}\left(\zeta(x_i) - \frac{\Delta x}{2\pi}\sum_{j=1}^{m}\gamma_j \ln\frac{\zeta^2(x_i) + (\xi_j - x_i)^2}{\zeta^2(\xi_j) + (\xi_j - x_i)^2}\right),$$

де γ_j – коефіцієнти квадратури Гауса та його екстраполяція за формулою

$$\tilde{u}(x_i) = \Delta x\sum_{i=1}^{2n-1}\left(u(x_{i-1})\sum_{j=1}^{m}\gamma_j \frac{2h}{(2h)^2 + (\xi_j - x_i)^2} T(\xi_j)\right),$$

$$T(\xi_j) = \sum_{j=1}^{m}(-1)^j \gamma_j \left(\sin^{2j-1}\xi_j \sin(2j+1)\xi_j - \sin^{2j}\xi_j \cos(2j+2)\xi_j\right);$$

---

46 Лише для рівномірної мережі; на нерівномірній мережі точок матриця загалом втрачає згадані властивості.

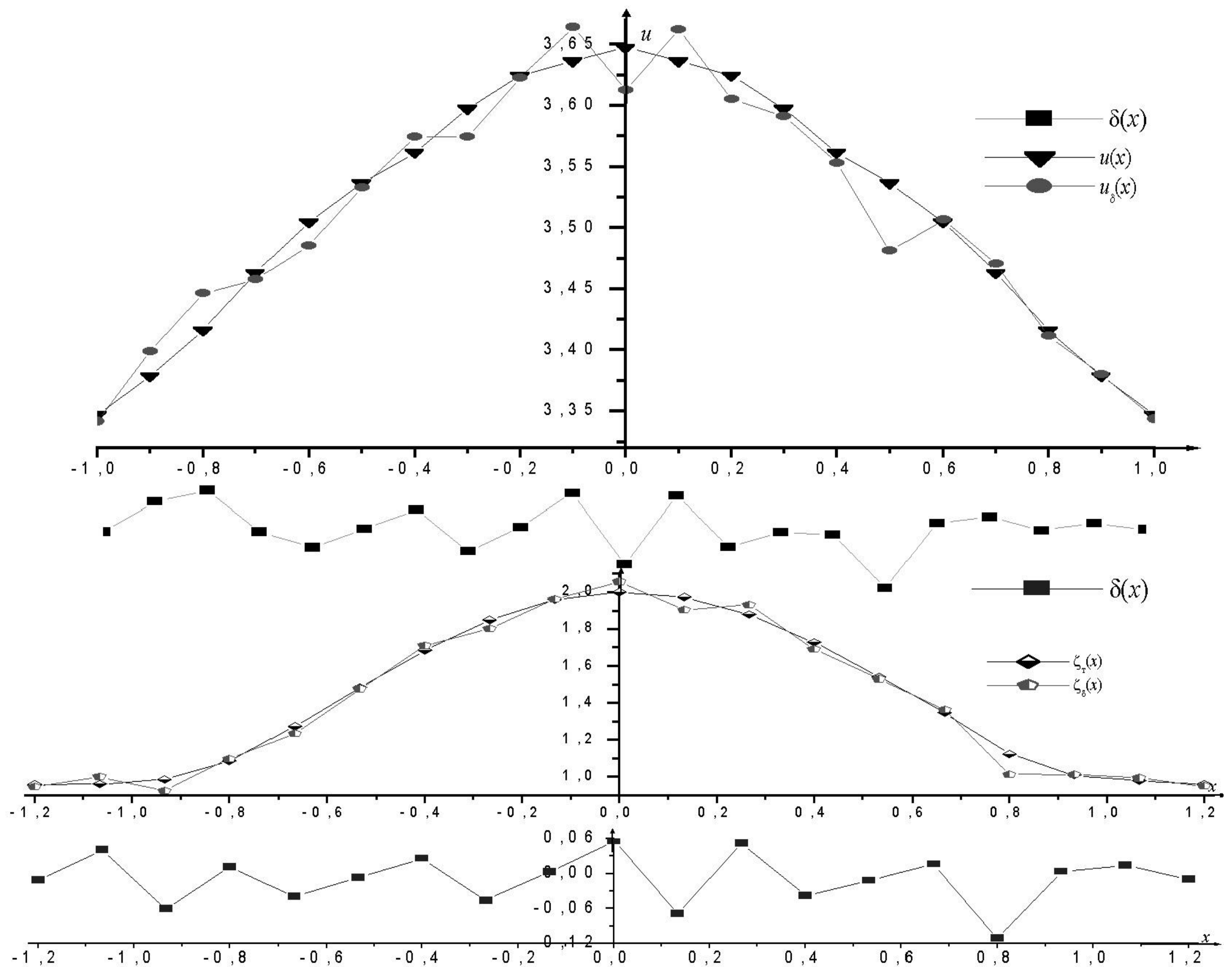


Рис. 4.2. Теоретичне поле, генероване модельним контактом (4.16).

3°. зашумлення отриманого поля $\tilde{u}(x_i)$ псевдовипадковою похибкою з рівномірним розподілом $u_\delta(x_i)=\sum\limits_{i=1}^{m}\{u_i+\Delta_i-\Delta_i/m\}$, $\Delta_i=\sigma\sum\limits_{i=1}^{m}\left(2^{24}r/5^9-0.5\right)$, з метою використання вектора $\tilde{u}(x_i)_{i=1}^{2m+1}$ як початкового наближення в оберненій задачі

$$S^+(x_i)=\sum_{i=1}^{m}u(x_i)\equiv\sum_{i=1}^{m}\frac{g(x_s)}{2\pi},\ s=\sum_{i=1}^{m}k_d(i-1)+1,\ m=\operatorname{int}(\varphi)n+1;$$

4°. розрахунок спряженої правої частини $v(x_i)$ через розклад значень $u(x_i)$ у ряд Фур'є і наступний синтез (подробиці див. у додатку **А**) за формулою

$$S^-(x_i)\equiv v_i=\sum_{i=1}^{m_0}\sum_{j=1}^{n_0}c_{ij}\,t_k,\quad t_k=\Delta x\sum_{i=1}^{m_0}\sum_{k=1}^{n_0}c_{ik}\,u_i\ ,\ c_{ij}=\sum_{i=1}^{m_0}\sum_{j=1}^{n_0}\left\{1+\cos\frac{2\pi i}{2m+1}+\sin\frac{2\pi i}{2m+1}\right\};$$

5°. формування моделі початкового наближення: задання апріорної інформації h,ε,δ та звуження області еквівалентності через введення обмежень $\zeta_{\min}(x_i)$ та $\zeta_{\max}(x_i)$ на шукані розв'язки

$$\sum_{ш=1}^{m_0}S^+(x_i)=\sum_{i=1}^{n_0}S^-(x_i)=\sum_{i=1}^{n_0}\zeta(x_i)\equiv h,\ n_0=\frac{m-n}{2};$$

6°. розрахунок границь інтегрування a_m та ініціалізація параметрів ітерацій σ, *iter*, *l*, *m*, *n*, *k*,

a, b, k_d, s; на цьому закінчується спільна частина алгоритмів;

7°. обчислення значень інтегральних ядер $K_r(x_i, h)$ за квадратурами Гауса

$$K_p(\breve{x}_i, h) = \frac{\Delta x}{\pi}\sum_{i=1}^{n_0}\gamma_i \frac{h}{h^2 + (\Delta x \cdot i - \xi_j)^2}, \ K_s(\breve{x}_i, h) = \frac{\Delta x}{2h}\sum_{i=1}^{n_0}\gamma_i \left(e^{\pi i \Delta x/2h} + e^{-\pi i \Delta x/2h}\right)^{-1}, \ \xi = \sum_{j=1}^{n_k}(j - 0.5)\Delta y$$

$$K_p(\breve{x}_i, h) = \frac{\Delta x}{2\pi}\sum_{i=1}^{n_0}\gamma_i \sum_{k=n_0+1}^{m_0}\frac{1}{\zeta(x_k)}\frac{e^f - e^{-f}}{e^f + e^{-f}}, \ x_i = \sum_{i=1}^{n}(i-1)\Delta x, \ f = \sum_{i=1}^{n_k}\frac{\pi(x_i - t_j)}{2\zeta_k};$$

8°. обчислення наближень $\tilde{\zeta}(x_i)$ із відповідного ітераційного процесу, наприк

лад (3.5):

$$S^+(x_k) = \sum_{k=n_0+1}^{m_0}\left\{u_k - \Delta x\sum_{j=1}^{n_0}\gamma_j K_p(\bar{x}_j, \zeta_k)\left[S^+(\bar{x}_j) + S^+(\xi_j)\right]u_j + K_p(\bar{x}_1, \zeta_k)S^+(x_k)\right\},$$

$$S^-(x_k) = \sum_{k=n_0+1}^{m_0}\left\{\bar{v}_k - \sum_{j=1}^{n_0}\gamma_j K_s(\bar{x}_j, \zeta_k)\left[S^-(\bar{x}_j) - S^-(\xi_j)\right]\zeta_j + K_s(\bar{x}_1, \zeta_k)S^-(x_k)\right\},$$

$$\zeta(x_i) = \sum_{i=n_0+1}^{m_0}\left\{S^+(x_i) + S^-(x_i)\right\};$$

9°. регуляризація отриманого розв'язку, тобто обчислення параметра регуляризації α за принципом нев'язки та визначення регуляризованого розв'язку за схемою (4.15).

10°. розрахунок середньоквадратичної похибки $\sigma_i = \sqrt{\sum_{ii=n_0+1}^{m_0}\zeta^2(\bar{x}_i, h) \Big/ (m_0 - n_0 - 1)}$; у разі, якщо $\|\sigma - \delta\|_{L_2} \le \varepsilon_{маш}$, вертаємось на крок **7**°, інакше фіксуємо в файлі результати обчислень $S_0^+(x_i)$, $S_0^-(x_i)$; $\tilde{\zeta}_i$, α_i, $\zeta_i^{\alpha_i}$; σ_n, $iter$.

Область інтегрування розбито на області, у межах яких довільні функції ζ, u можна замінити їх середніми значеннями, а сам інтеграл по області D – сумою інтегралів від підобластей, які легко обрахувати. Цей алгоритм описує загальну схему розв'язання плоскої контактної задачі на прикладі рівняння (3.5); для інших рівнянь схема аналогічна, окрім кроків **4**° і **8**°. Параметр регуляризації α_n у створених на основі співвідношень (4.7) чисельних схемах розв'язку оберненої контактної задачі автоматично розраховують на кожному кроці ітерацій з умови нев'язки[47] . При тестовому моделюванні за параметр α_n править число ітерацій розглянутих прикладів. Для звуження області еквівалентності розв'язків враховують, якщо відомі, обмеження на значення параметрів моделі. У нашому випадку модельні обмеження мають вигляд

$$\zeta_i^n(x_j) = \begin{cases} \zeta_i^n(x_j), & h^- \le \zeta_i^n(x_j) \le h^+, \\ h^-, & \zeta_i^n(x_j) < h^-, \\ h^+, & \zeta_i^n(x_j) > h^+, \end{cases}$$

де h^- і h^+ – нижні і верхні обмеження на глибини контактів. Ітерації закінчують по досягненні

[47] Можна і з умови мінімізації різницевого поля – це підвищує стійкість і максимізує швидкість збіжності ітерацій.

заданої середньоквадратичної нев'язки чи максимальної кількості ітерацій. Передбачено умовний друк проміжних результатів, облік часу рахунку та аварійний вихід за індикатором похибки IER для корекції роботи програм.

4.4.2. Затрати обчислень. Оптимальна параметризація при заданому рівні локальних похибок сприяє зниженню чисельних затрат. Мірою її ефективності є величина затрат обчислень $k_r = l_1 / l_0$, $\bar{l}_i = (a-b)^{-1}\int_a^b l_i dx \equiv l_i(\xi),\ a<\xi<b,\ i=0{,}1$ – осереднена на інтервалі інтегрування довжина кроків інтегрування початкової та еквівалентної задач. Ця величина характеризує швидкодію алгоритму. Загалом метод (3.1) вимагає $2n^2+1$ елементарних операцій на кожному кроці ітерацій, а метод (2.24) – лише n^2+2n+1 операцій. Порівняння теоретичного часу обліку для m кроків кожного зі згаданих алгоритмів, здійснене за оцінками $T_1 \approx m\left((n^2+6n)t_1+t_2\right)$, $T_2 \approx m\left((3n^2+4n)t_1+t_2\right)$, де t_1 – час дії процесора, t_2 – час доступу до нього, дозволяє зробити висновок, що алгоритм (3.1) є ефективнішим за умови, що кількість ітерацій[48] $m < \left((3n^2+4n)t_1+t_2\right)/\left((n^2+6n)t_1+t_2\right)$. Ідея порівняння алгоритмів запозичена з монографії [20]. Оптимальна параметризація не збільшує чисельних затрат, якщо довжина кроку інтегрування визначається умовою чисельної стійкості. Зазначимо, що вплив оптимальної параметризації на чисельну стійкість методу досліджено на прикладі тестової задачі *4.1*. Її точний розв'язок монотонно спадає за модулем, тому умовою чисельної стійкості є вимога монотонного спадання модуля розв'язку рівняння, $|\zeta_{m+1}| < |\zeta_m|,\ m=1,2,\ldots$, яку зведено до обмежень на крок інтегрування. Отримані оцінки є надійним засобом кількісного аналізу ефективності алгоритмів.

---

[48] Оцінки наближені, бо знехтувано часом перевірки логічних зв`язків та виконання арифметичних операцій зі скалярами.

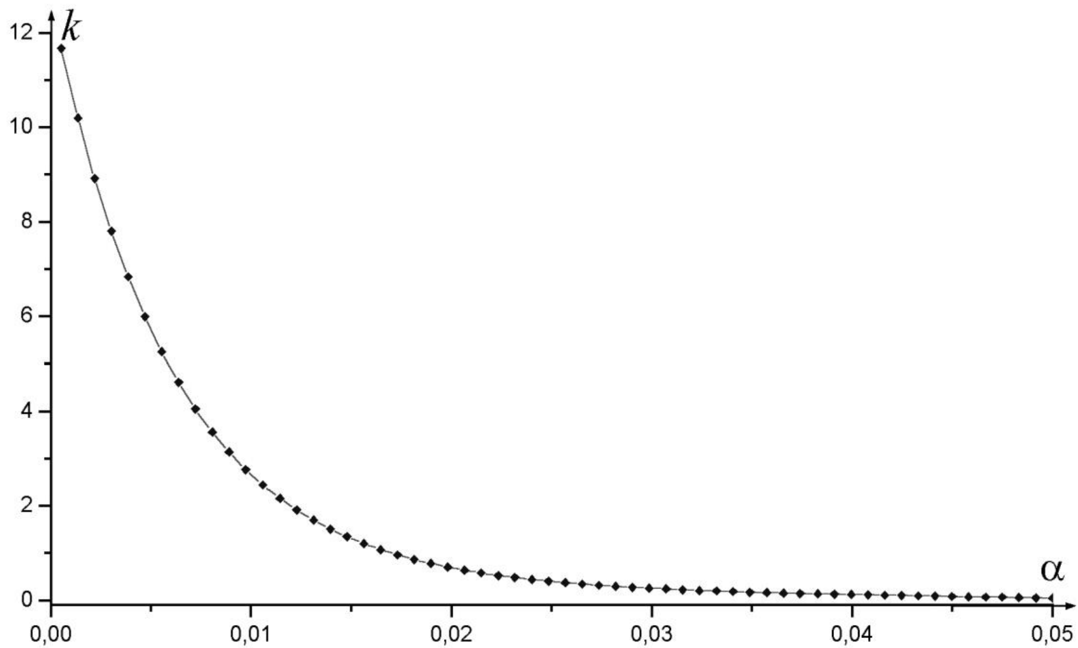


Рис. Рис. 4.3. Залежність чисельних затрат від параметра оптимізації $k_r = f(\alpha)$.

4.4.3. Результати моделювання. Через складність рівнянь для розв'язання обернених задач теоретично вивчити всі їх аспекти неможливо, але перевірку деяких припущень можна здійснити на тестових моделях. Перш за все вивчалась поведінка ядер відповідних інтегральних рівнянь. У першому розділі подано кілька альтернативних формул (1.34$_i$) для обчислень виразів зі швидкоспадними ядрами $K_j(x_i,h),\ j=\overline{1,4}$. Чисельна перевірка проводилась за формулами

$$K_1(x_i,t_j)=\frac{\Delta t}{2\pi}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=1}^{m_2}\frac{\cos x_i t_j}{1+e^{2ht_j}},\ m_2=\mathrm{int}\left(\frac{\alpha_0}{2h\Delta t}\right),\ K_2(x_i,t_j)=\frac{\Delta t}{\pi}\sum_{j=0}^{m_3}\sum_{k=1}^{m}\frac{\cos\pi(j+(2k-1)/m)x_i}{1+e^{2\pi(j+(2k-1)/m)h}},$$

$$K_3(x_i,t_j)=\frac{\Delta t}{\pi}\sum_{j=0}^{m_4}\sum_{k=1}^{m}\frac{e^{-\pi(j+(2k-1)/m)h}}{e^{\pi(j+(2k-1)/m)h}e^{-\pi(j+(2k-1)/m)h}}\cos\pi(j+(2k-1)/m)x_i,\ m_3=\mathrm{int}\left(\frac{\alpha_0}{2\pi h}\right),\ m_4=\mathrm{int}\left(\frac{\alpha_0}{\pi h}\right),$$

$$K_4(x_i,t_j)=\frac{2h}{\pi}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{4j(4j-2)h^2-(x_i-t_j)^2}{\left[(x_i-t_j)^2+(4j-2)^2h^2\right]\left[(x_i-t_j)^2+4j^2h^2\right]},$$

і довела їх нерівнозначність за точністю і *швидкодією*. Результати обчислень запозичені з праці [92] і зведено у табл. 4.2, де також подано "точні" значення чисел $K(x,h)$, визначені за формулою $K_1(x_i,h)$ для $n_1 \ge 1200$, коли всі значущі цифри числа $K(x,h)$ незалежні від параметра n_1. Результати обчислень $K_5(x_i,h)$ інтегралу (1.28) без урахування осциляції підінтегральної функції наведено у табл. 4.3.

Таблиця 4.2. Значення ітерованих $K_i(x_i,h)$ та "точного" $K(x,h)$ інтегральних ядер, $\times 10^{-2}$.

$\frac{x}{h}$	$K(x,h)$	$K_1(x_i,h)$, $n_1=400$	$K_2(x_i,h)$, $n_3\times m=10800$	$K_3(x_i,h)$, $n_4\times m=22000$	$K_4(x_i,h)$, $m=2000$
0.0.	11.03178000763	11.03179918843	11.03173910133	11.03173910133	11.02979302377
0.857	8.835677940801	8.835677936959	8.835637034336	8.835637034335	8.833690518086
2.0.	4.290984421547	4.290984420084	4.290943514361	4.290943514361	4.288996090697
2.857	2.35556070589	2.355560705179	2.355519797786	2.355519797786	2.353571988386
4.0	1.165109450533	1.165109450159	1.165068540699	1.165068540698	1.163120495365
4.857	0.756794005295	0.756794005024	0.756753093784	0.756753093785	0.754804968763
6.0	0.475306848602	0.475306848412	0.475265934351	0.475265934352	0.473317756202
6.857	0.356745399574	0.356745399426	0.356704482889	0.356704482890	0.354756283823
8.0	0.257869332514	0.257869332402	0.257828412079	0.257828412080	0.255880197531
$\delta_{\text{отн}}$	0.0	0.8049×10^{-6}	0.1587×10^{-1}	0.1587×10^{-1}	0.7714
$t_{обч}$	1.0	0.125	11.375	101.25	0.229

Таблиця 4.3. Значення інтегрального ядра $K_1(x_i,h)$ без врахування його осциляції, $\times10^{-2}$.

$\frac{x}{h}$	$K_5(x_i,h)$,. $n_2=100$	$K_5(x_i,h)$, $n_2=200$	$K_5(x_i,h)$, $n_2=400$	$K_5(x_i,h)$, $n_2=600$	$K_5(x_i,h)$, $n_2=1200$
0.0.	10.50218765485	10.90485267924	11.00032382350	11.01782239675	11.02829548261
0.857	8.275740624095	8.707157939881	8.804124956838	8.821700962901	8.832191797791
2.0.	3.572107071782	4.155134588534	4.258998642135	4.276922097413	4.287492125002
2.857	1.362056114375	2.209731293988	2.323015199044	2.341399590880	2.352061323304
4.0	-0.67041329652	0.998326916405	1.113148371352	1.150731749059	1.161597184610
4.857	-2.49973864044	0.566561182249	0.722086995555	0.742213422012	0.753269363673
6.0	-6.64065060016	0.238324044398	0.438754905435	0.460388473915	0.471761963773
6.857	-10.0357462834	0.066696302093	0.318469378995	0.341520350794	0.353182464134
8.0	-8.613081554821	-0.145395993243	0.216767570619	0.242159087944	0.254278421189
$\delta_{\text{отн}}$	3440.0	156.4	15.94	6.092	1.392
$t_{обч}$	0.083	0.208	0.312	0.604	0.833

Аналіз отриманих даних виявив, що *найефективнішим за точністю і швидкодією є алгоритм на основі формули* (1.34₁). Його ефективність пов'язана з тим, що для високоточного чисельного інтегрування виразу (1.26) не потрібно великої кількості вузлів, тоді як для чисельного інтегрування осцилюючої функції весь інтервал інтегрування необхідно розбити нулями функції на n_3 чи n_4 підінтервалів $(n\pi,(n+1)\pi)$, $n=0,1,\ldots n_i$ і на кожному з них вибрати m вузлів ($n_i\times m$ вузлів, $i=3,4$). Обчислення інтегралу від осцилюючої функції без урахування

такої особливості призводить до грубих похибок остаточного результату, оскільки він, як видно з табл. 4.3, сильно залежить від параметра. Описана ситуація наводить на висновок, що *вибір того чи іншого способу обчислень певної характеристики необхідно здійснювати не лише на основі теоретичних посилок, а й за даними чисельного експерименту*.

Результати дослідження поведінки окремих ядер

$$K_6(x_i,t_j)=-\frac{\Delta t}{2\pi}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=1}^{m_1}\left(\mathrm{ch}\frac{\pi(x_i-t_j)}{2h}\right)^{-1},\ K_7(x_i,t_j)=\frac{\Delta t}{2\pi}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=1}^{m_1}\mathrm{th}\frac{\pi(x_i-t_j)}{2h},$$

$$K_8(x_i,t_j)=\frac{\Delta t}{\pi}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{h}{h^2+(x_i-t_j)^2},\quad n=20,\ m=200,.$$

ілюструє рис. 4.4.

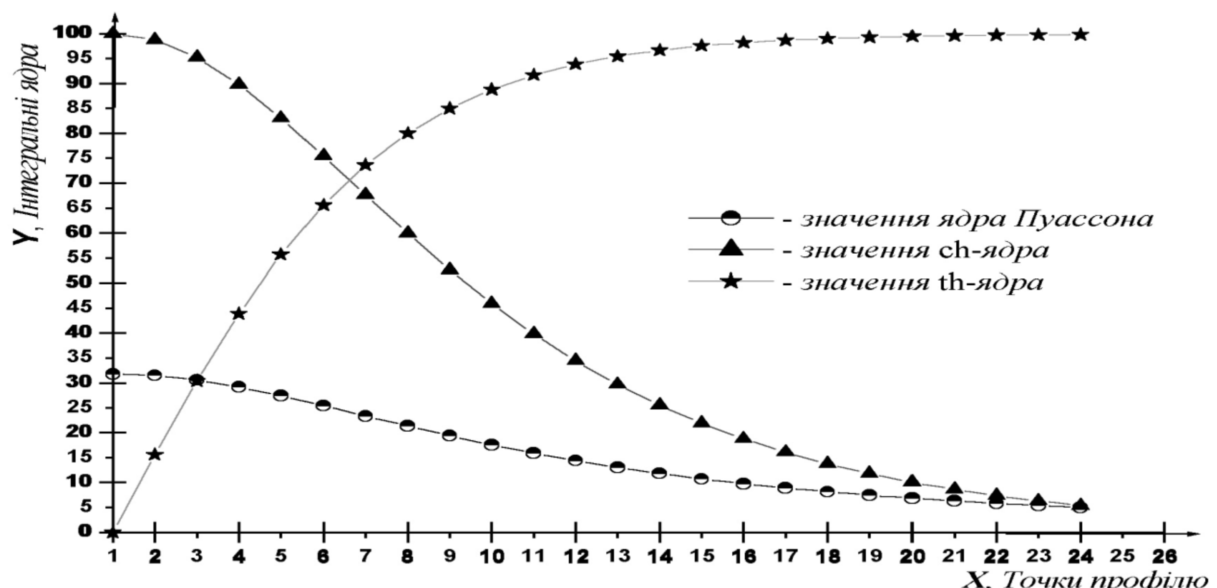


Рис. 4.4. Поведінка інтегральних ядер $K_6(x,t)-K_8(x,t)$.

Точні праві частини отримано шляхом оцінки аналітичних виразів для модельних функцій:

$$\int_a^b\int_c^d\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}dxd\xi=(b-c)\mathrm{arctg}\frac{b-c}{h}-(a-c)\mathrm{arctg}\frac{a-c}{h}+(a-d)\mathrm{arctg}\frac{a-d}{h}-(b-d)\mathrm{arctg}\frac{b\text{-}d}{h}-$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+(b-c)^2}{1+(a-c)^2}\frac{1+(a-d)^2}{1+(b-d)^2}\right|+C,$$

$$\int_a^b\int_c^d\frac{dxd\xi}{\mathrm{ch}(\xi-x)}=2\{((b-c)\mathrm{arctg}e^{(b-c)}-(a-c)\mathrm{arctg}e^{(a-c)}+(a-d)\mathrm{arctg}e^{(a-d)}-(b-d)\mathrm{arctg}e^{(b-d)}),$$

$$\int_a^b\int_c^d\mathrm{th}(\xi-x)d\xi dx=(b-c)\ln\mathrm{ch}(b-c)-(a-c)\ln\mathrm{ch}(a-c)+(a-d)\ln\mathrm{ch}(a-d)-(b-d)\ln\mathrm{ch}(b-d).$$

Інтегральне ядро $K_9(x_i,t_j)=\frac{\Delta t}{2\pi}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=1}^{m_1}\mathrm{th}\frac{\pi(x_i-t_j)}{2h}\left(\frac{h}{x_i-t_j}+\frac{h}{x_i+t_j}\right),\ m_1=\mathrm{int}\left(\frac{2h\alpha_0}{\pi2\Delta t}\right)$ хар

актеризють рис. 4.5 і 4.6.

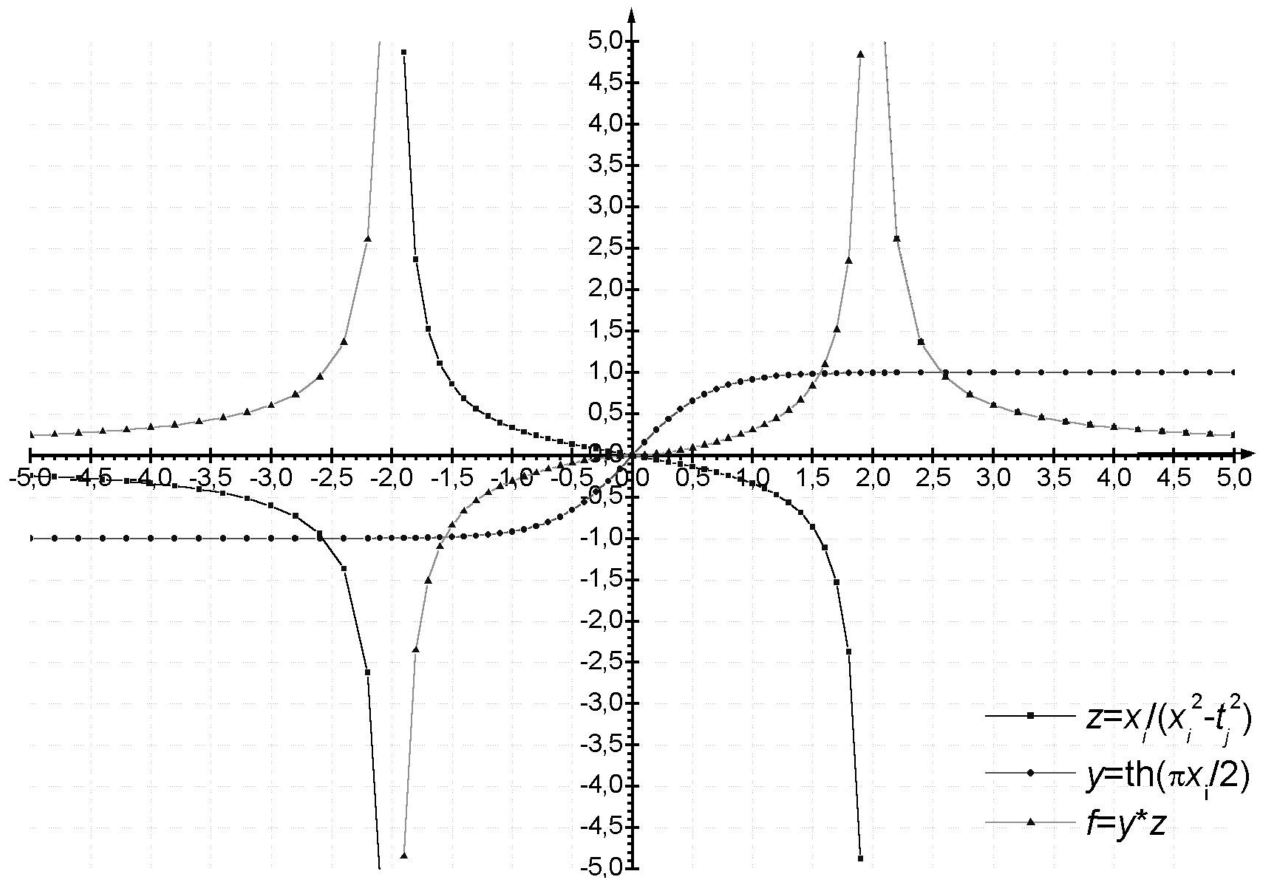


Рис. 4.5. “Точне” ядро $K_9(x,t)$.

Останній графік 4.6 зайвий раз підтверджує, що ядро $K_9(x,t)$ очевидно залежить від значень плаваючої точки t_i – ефективної змінної інтегрування.

Після цього зауваження проілюструймо працездатність алгоритмів (2.24), (2.30) та (3.1), (3.4) на модельних прикладах. Нехай вхідну інформацію і клас $Nu^{(1,\alpha)}(1,D)$ розв’язків моделі характеризує такий числовий матеріал[10]:

довжина модельної границі $l \in [c_0, c_3] \equiv [-1,1] = 2$ *км*; крок по профілю $\Delta x = 0.1$ *км*, коливання $\zeta_{\min}(x) \le \zeta(x) \le \zeta_{\max}(x)$ контакту дорівнюють $-1,6 \le \zeta(x) \le -1,4$ *км*; пере пад густин $\sigma = 0.3\ г/см^3$; апріорна оцінка глибин контакту $h = 1,2.км$; амплітудні характеристики контакту $a = b = 1$; мережа спостережень $x_i = (-1.4 + 0.1i)$; пара метри схеми $n = 15,\ k_d = 2,\ h = 1.0,\ \varphi = h_1 = k = a = b = 1,\ \Delta x = 0,133,\ \Delta\zeta = 0,066,\ \delta = 10^{-5}$.

[10] Моделі розраховано у плоскому варіанті, який жваво застосовують в сучасних інтерактивних системах.

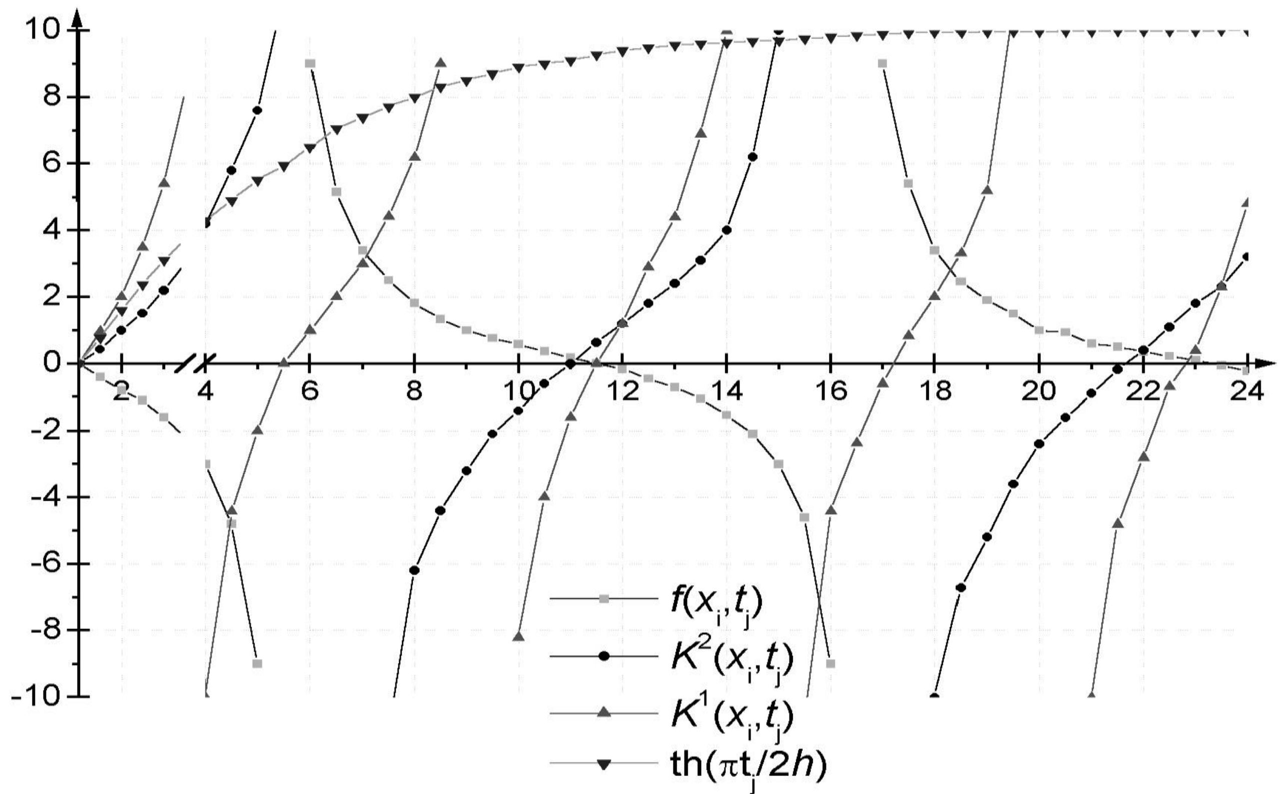


Рис. 4.6. Поведінка інтегрального ядра $K_9(x,t)$ за різних значень *τ*.

Тестування проходить в такий спосіб: для заданих точних розв'язків $\zeta_T(\xi)$, ядер $K_T(x,\xi)$ розраховують аналітично або чисельно праві частини $u_T(x)$, потім вносять в них випадкові похибки (нормальний розподіл), а точні ядра замінюють наближеними $K_\delta(x,\xi)$ тієї ж гладкості з точністю $\varepsilon = \sqrt{\int_{c_1}^{c_2}[K_\delta(x)-K(x)]^2 dx}$. З цими даними вирішено такі модельні приклади.

Приклад 4.1. Модельне рівняння $\int_{c_0}^{c_3} K(x,\xi)\zeta(\xi)d\xi = u(x),\ c_1 \le x \le c_2$, точний розв'язок $\zeta(\xi) \approx \begin{cases}(1-\xi^2)^2, & |\xi| \le 1\\ 0, & |\xi| \ge 1\end{cases}$, точне ядро $K(x,h)=e^{-x^2}$, при цьому $[c_0,c_3]=[-1.4,1.4]$, $n=29,\ \Delta x=0.1,\ [c_1,c_2]=[-1,1]$, порядок регуляризації – нульовий. Особливістю даної моделі є гладкість функцій контакту та правої частини та їх майже однакова ефективна ширина. Параметри моделі ілюструє рис. 4.7.

Приклад 4.2. Все те саме, але точне ядро $K(x,h)=\sqrt{4/\pi}e^{-4x^2}$, що означає внесену похибку оператора $\varepsilon \approx 0.12$ (тобто $\varepsilon_{\text{îòí}} \approx 12\%$).

Особливість прикладу: за такої величини похибки стає складно визначити шукану функцію $\zeta(x)$, але не практиці рідко трапляється такі похибки..

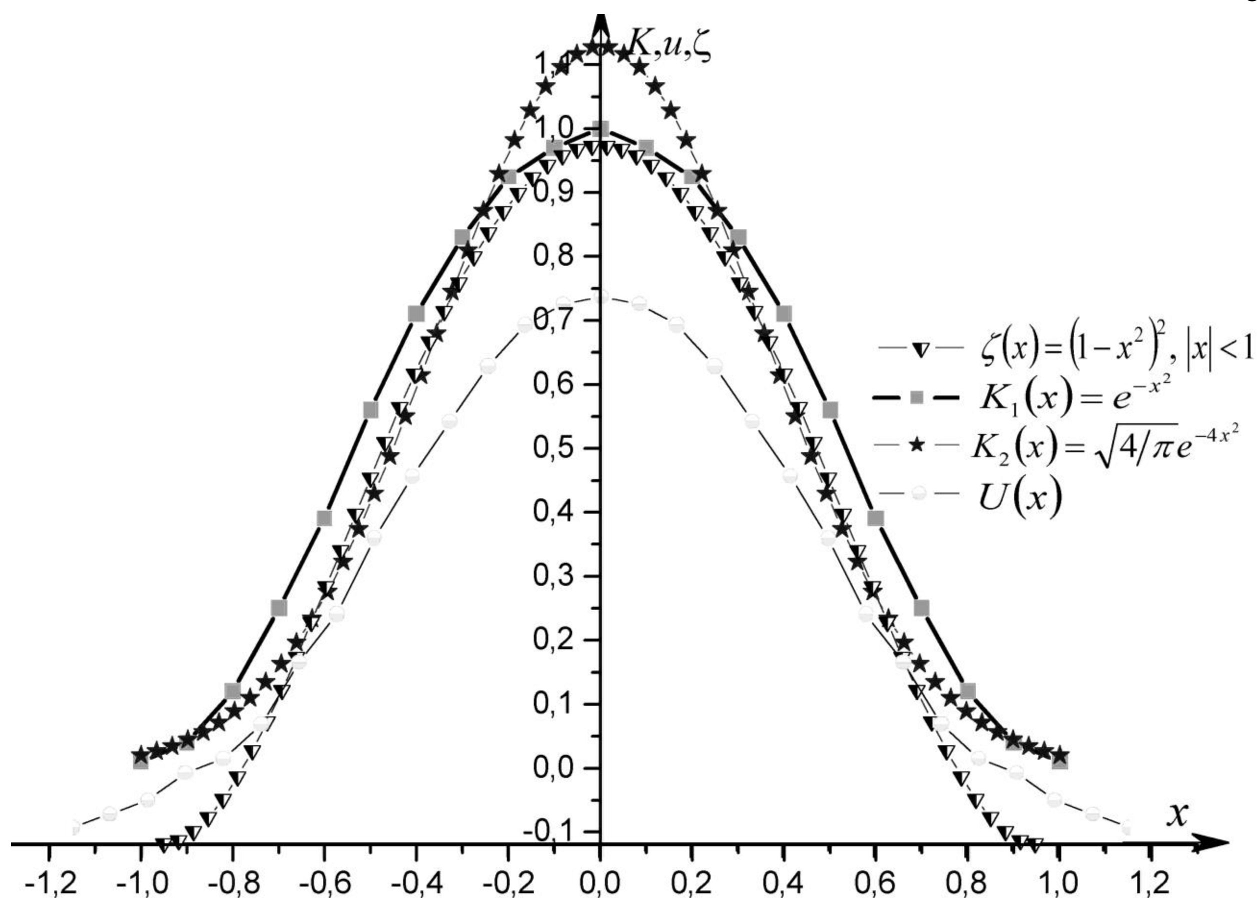


Рис. 4.7. Точні ядра $K_1(x)$ і $K_2(x)$, розв'язок $\zeta(x)$ та права частина $u(x)$.

Розв'язки залежать від параметрів початкової моделі, але зберігають стійкість за неточного задання вхідних даних Дані моделі не претендують на адекватність реальній геології (та й розв'язком оберненої задачі є не одна певна границя, а множина *допустимих* еквівалентних границь [19, с. 26]), але характер зміни початкової моделі вказує напрям і необхідний додатковий матеріал для подальшого аналізу ситуації. Гадаємо, що ці алгоритми можна використати у побудові огинаючих сімейства *допустимих* контактних границь.

***Зауваження* 4.4.** У наведених моделях функція глибини густинних границь – однозначна, а в складних геологічних умовах вона, як правило, багатозначна. Р.П. Денисюк [30] у такому разі пропонує замінити її серією однозначних, які в області багатозначності описують свою гілку функції (це еквівалентно безпосередньому заданню багатозначних функцій).

***Зауваження* 4.5.** У задачі для кількох границь [48] збіжність сумарного ряду, що моделює вплив N пластів, випливає зі збіжності рядів для кожної окремої границі. Це дає змогу поширити отримані результати на вирішення задачі для серії границь.

Резервами для покращення алгоритмів є використання різних способів мінімізації на різних її етапах[11], вибір різних початкових наближень, норм і функції мети, сумісний підбір за

---

[11] Цей підхід апробовано у працях Є.Г. Булаха, В.І. Аронова, І.М. Корчагіна, В.М. Страхова, В.І. Старостенка .

полем та його трансформантами. Детальна характеристика цих резервів виходить за рамки даної роботи.

4.4.4. Порівняльна характеристика чисельних розв'язків. Запроваджений у роботі підхід до чисельної реалізації розроблених алгоритмів – лише один з можливих. Для тестування його ефективності корисно порівняти чисельні розв’язки за різними алгоритмами[12]. При порівнянні різних алгоритмів слід чітко фіксувати рівень їх опису. Услід за Гольдіним виділимо наступні рівні опису[13]: програмний; чисельної реалізації алгоритму (спосіб підсумування); чисельної схеми (апроксимації) подання одного і того ж оператора (інтегральна, скінченно-різницева чи спектральна форма); подання оператора у класі еквівалентних операторів для вирішення однієї й тієї ж задачі. Перші два рівні – дискретні і інваріантні щодо вигляду алгоритму; на третьому рівні можна порівнювати точність різних реалізацій одного й того ж оператора; на останніх двох рівнях говорити про різну точність складно, але можна оцінити алгоритми за додатковими критеріями (чисельна складність, стійкість до похибок, тощо).

Порівняймо за рівнем чисельної схеми алгоритми (2.24) для варіанту з довгим профілем спостережень з відомими алгоритмами Б.В. Нумерова [64], О.К. Маловичка [58] і (1.4) Н.Н. Чорної [142]. Такий вибір продиктовано працею [142], оскільки у ній вже зроблено деякі порівняння[14]. Запозичмо звідти основну стратегію порівняння і деякі оцінки. Отже, алгоритм Нумерова дає перше наближення процесу ітерацій (2.24) у вигляді

$$\zeta_n(x,h)=u_n(x)+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}v_n(\xi)d\xi=v_n(x)+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}u_n(\xi)d\xi .$$

Результатом скінченновимірної апроксимації цього виразу є два загалом різних наближення контактної границі

$$\zeta_1(x_i,h)\approx u(x_i)+\frac{\Delta x}{\pi}\sum_{j=1}^{n}\frac{h}{h^2+(\xi_j-x_i)^2}v(\xi_j),\ \zeta_2(x_i,h)\approx v(x_i)+\frac{\Delta x}{\pi}\sum_{j=1}^{n}\frac{h}{h^2+(\xi_j-x_i)^2}u(\xi_j),$$

де $\Delta x=2l_u/n$ – крок по профілю $[-l_u,l_u]$, на якому задані значення поля $u(x)$. Алго

ритм Маловичка відрізняється лише зображенням і способом обчислення лінійного рівняння:

$$\zeta_n(x_i,h)=h+\eta_n(x_i,h),\ \eta_n(x_i,h)=\zeta_n(x_i,h)-h:\frac{\Delta x}{\pi}\sum_{i=1}^{n}\frac{h}{h^2+(\xi_j-x_i)^2}\eta_n(\xi_i,h)=u_m(x_j)-h .$$

Помноживши обидві частини рівняння на вираз $\sum_{j=1}^{n}\frac{h}{h^2+(t_j-x_i)^2}$ отримаємо модифікований

варіант алгоритму у вигляді

[12] Алгоритми задач структурної гравіметрії реалізовано у працях [109], [18], [81], [148], [130]; багато з них нам недоступні.
[13] Гольдин С.В. Исповедь геофизика-математика // Геофизика. – №6. – 2000. – С. 3-11.
[14] Дві перші праці започатковують, а остання – узагальнює чисельне розв`язання нелінійних рівнянь контакту. Вони слугують підвалинами для фундаментальних розробок [2-7, 17, 28, 32, 46-48, 56, 63, 146-150, 157].

$$\zeta_n(x_i,h)=h+\eta_n(x_i,h),\ \sum_{i=1}^{n}\frac{2h}{(2h)^2+(\xi_i-x_j)^2}\eta_n(\xi_i,h)=\sum_{k=1}^{m}\frac{h}{h^2+(x_j-\xi_k)^2}\left[u_n(\xi_k-h)\right],$$

де поле $u(x_k)$ задано на відрізку $[-l_u,l_u]$, а контакт $\zeta(x_i,h)$ обчислюється у тих же точках x_i на відрізку $[-l_\zeta,l_\zeta]\subset[-l_u,l_u]$ з тим же кроком $\Delta x=l_\zeta/m=l_u/n$. Останнє наближення контакту, на відміну від попередніх, крім величин h,l_u,n,δ залежить ще і від l_ζ,m. До порівняння алгоритмів вивчався характер впливу цих величин на розв'язок задач. Зокрема, вплив похибки апроксимації, пов'язаної із заміною відповідних невласних інтегралів інтегралами на обмежених множинах, для оператора рівняння (1.4) оцінено величиною

$$\|\varepsilon(x,s)\|_C=\frac{1}{\pi}\left\{\pi(h^+-h^-)-s\ln\frac{s^2+(h^+)^2}{s^2+(h^-)^2}-2h^+\mathrm{arctg}\frac{s}{h^+}-2h^-\mathrm{arctg}\frac{s}{h^-}\right\},$$

де s – скінченна границя інтегрування, обчислена з ітераційного процесу

$$s_{n+1}=s_n+\pi(h^+-h^--\varepsilon)+s_n\ln\frac{s_n^2+(h^-)^2}{s_n^2+(h^+)^2}-2h^+\mathrm{arctg}\frac{s_n}{h^+}+2h^-\mathrm{arctg}\frac{s_n}{h^-},\ s_0=\frac{(h^+)^2+(h^-)^2}{\pi\varepsilon},$$

а для операторів алгоритмів Нумерова і Маловичка не перевищує величин

$$\|\varepsilon_\zeta(x,l_u)\|_C\le\bar{v}\left(1-\frac{2}{\pi}\mathrm{arctg}\frac{s}{h}\right),\ \bar{v}=\max_x|v(x)|,\ \|\varepsilon_\zeta(x,m)\|_C\le\bar{\eta}\left(1-\frac{2}{\pi}\mathrm{arctg}\frac{s}{h}\right),\ \bar{\eta}=\max_x|\eta(x)|$$

при $x\in(-\infty,l_u)\cup(l_u,\infty)$. З цих оцінок видно, що похибки апроксимації різних операторів характеризує однакова залежність. Ілюструємо її через різницю $\Delta u(x,s)$ "точних" $u_\text{т}(x)$ і наближених $u_n(x,s)$, $s\le l_u$ значень поля

$$\Delta u(x,s)=h-\zeta(x)+\frac{1}{2\pi}\int_{-s}^{s}\ln\frac{(s-x)^2+\zeta^2(x)}{(s-x)^2+\zeta^2(s)}ds-\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\ln\frac{(s-x)^2+h^2}{(s-x)^2+\left[h+a(1-s^2)^2\right]^2}ds,$$

обчислених від дискретизованого оператора на модельному класі контактів

$$\zeta(x)=\begin{cases}h+a(1-x^2)^2,\ x\in[-1,1]\\ h,\ \ x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)\end{cases}.$$

За аналогічною схемою порівняймо варіанти алгоритмів (3.1) та Н.Н. Чорної [142] для короткого профілю спостережень. Похибка апроксимації регуляризованого оператора рівняння Ейлера для першого з алгоритмів має оцінку

$$\|\varepsilon^+(x,n)\|_C=\frac{2\bar{u}h^+}{\pi}\left(\mathrm{arctg}e^{s/h^-}-\mathrm{arctg}e^{-s/h^-}\right)+2\bar{\zeta}\left(1-\mathrm{arctg}e^{s/h^-}\right)+\varepsilon_0,$$

$$\|\varepsilon^-(x,n)\|_C=\frac{\bar{u}h^+}{\pi}\left(1-\ln\mathrm{ch}\frac{\pi s}{2h^-}\right)+\frac{\bar{\zeta}}{h^-}\left(1-\ln ch\frac{\pi s}{2h^+}\right)+\varepsilon_0,\ \bar{u}=\max_x|u(x)|,$$

$$\varepsilon_0=2\frac{h^+}{h^-}\left(\mathrm{arctg}\frac{s}{h^+}-\mathrm{arctg}\frac{s}{h^-}\right),\ \bar{\zeta}=\max_x|\zeta(x)|,$$

а для другого її оцінено виразом

$$\|\varepsilon(x,m)\|_C=\frac{\bar{u}h^+}{h^-}\left(1-\frac{2}{\pi}\mathrm{arctg}\frac{2s}{h^-}\right)+\frac{\bar{\eta}h^+}{h^-}\left(1-\frac{2}{\pi}\mathrm{arctg}\frac{s}{2h^-}\right)+\frac{\varepsilon_0}{\pi},\ \bar{\eta}=\max_x|\eta(x)|,$$

$$\varepsilon_0 = 2\pi\left(h^+ - h^-\right) - s\ln\frac{s^2 + \left(2h^+\right)^2}{s^2 + \left(2h^-\right)^2} - 4h^+\operatorname{arctg}\frac{s}{2h^+} + 4h^-\operatorname{arctg}\frac{s}{2h^-}.$$

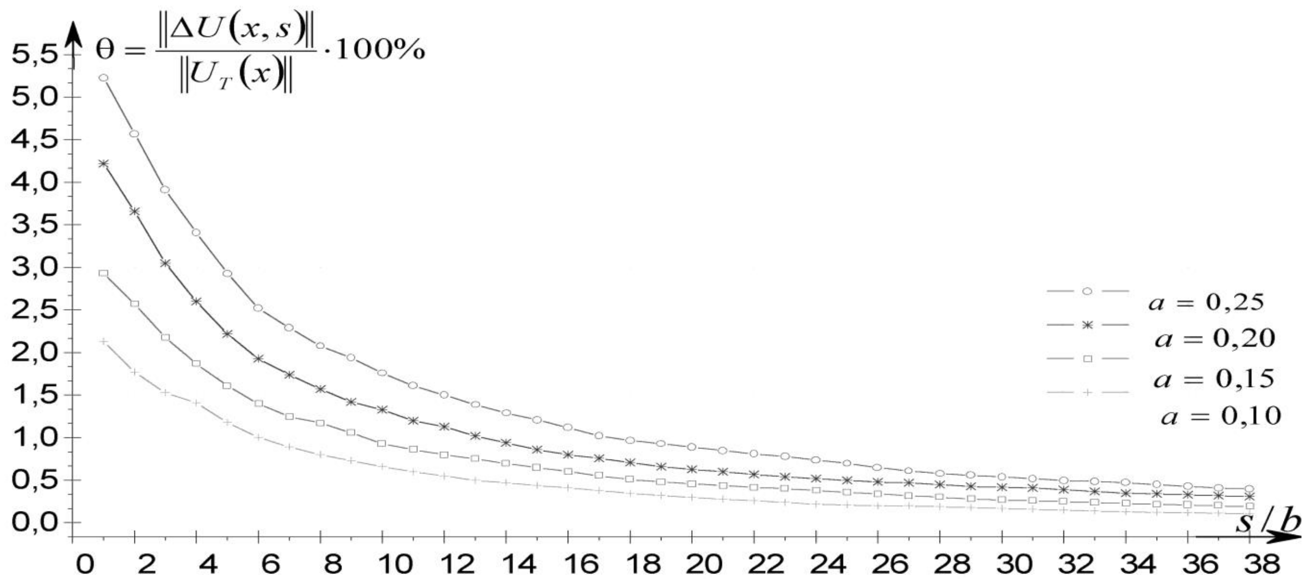


Рис. 4.8. Залежність відносної похибки обчислень поля від параметрів контакту.

Задаючи у процесі чисельного інтегрування вищезгаданих виразів за формулою Гауса конкретні значення параметрів a, b модельного контакту і параметра s точності апроксимації операторів, отримаємо наочне зображення залежності точності розв'язку $\theta = 100\% \|\Delta u(x,s)\| / \|u_{\text{т}}(x)\|$ від спотворень оператора $\Delta u(x,s)$ (рис. 4.8). При відношенні $s/b = 16$ відносна похибка обчислень[15] поля не перевищує 1,5%. Ця залежність спільна для всіх алгоритмів, а залежність розв'язків від інших параметрів набуває індивідуального характеру (рис. 4.9-4.11).

У алгоритмі Нумерова залежність від параметра h сильніша, ніж від параметрів m і δ (рис. 4.9, позначення $\mu = 100\% \|\varepsilon_\zeta\| / \|\zeta\|$, $\nu = 100\% \|\delta\| / \|u\|$). Результати досліджень залежності розв'язку за алгоритмом Маловичка від параметрів чисельної схеми (за принципом порівняння наближеного модельного розв'язку в певній нормі) підсумовують рис. 4.10, 4.11.

[15] Вплив похибок чисельного інтегрування нівелюється за рахунок достатньої густини вузлів інтегрування, визначеної із залежності відносної похибки від числа вузлів інтегрування .

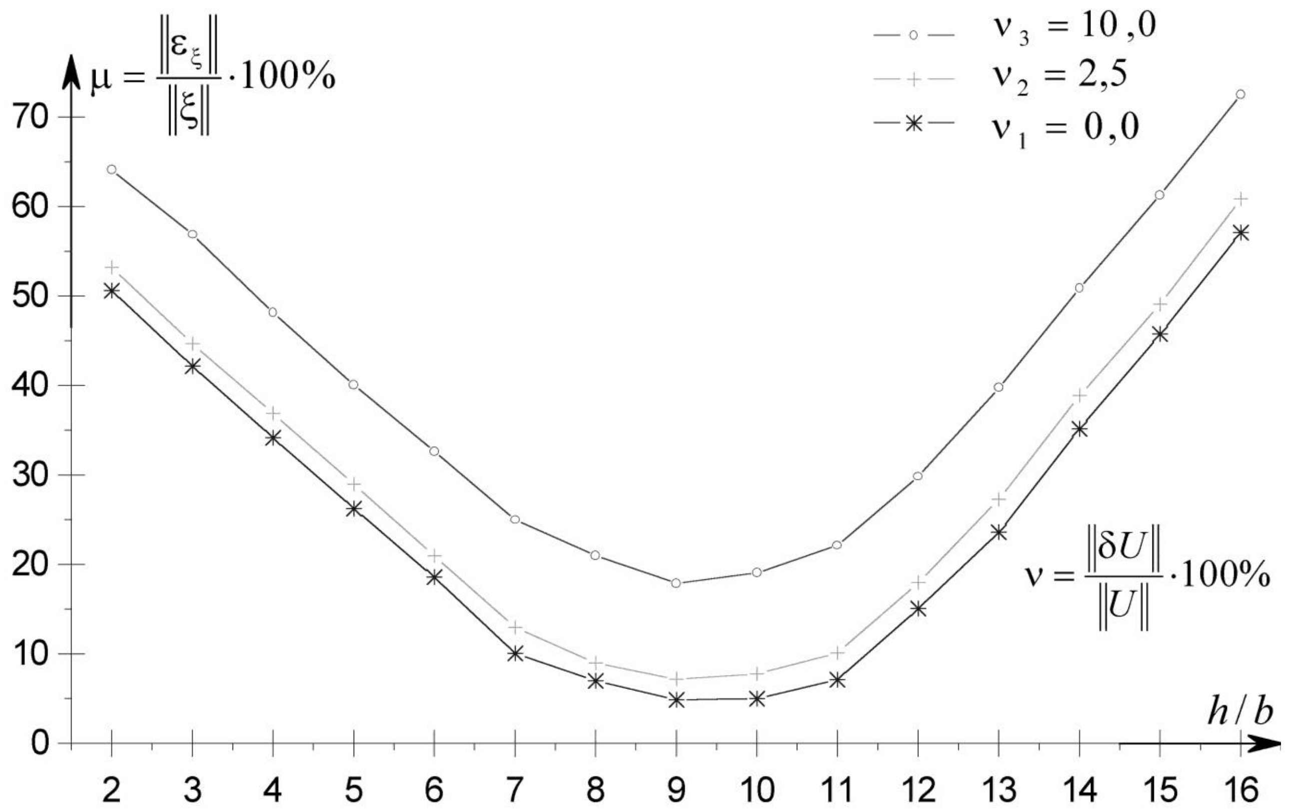
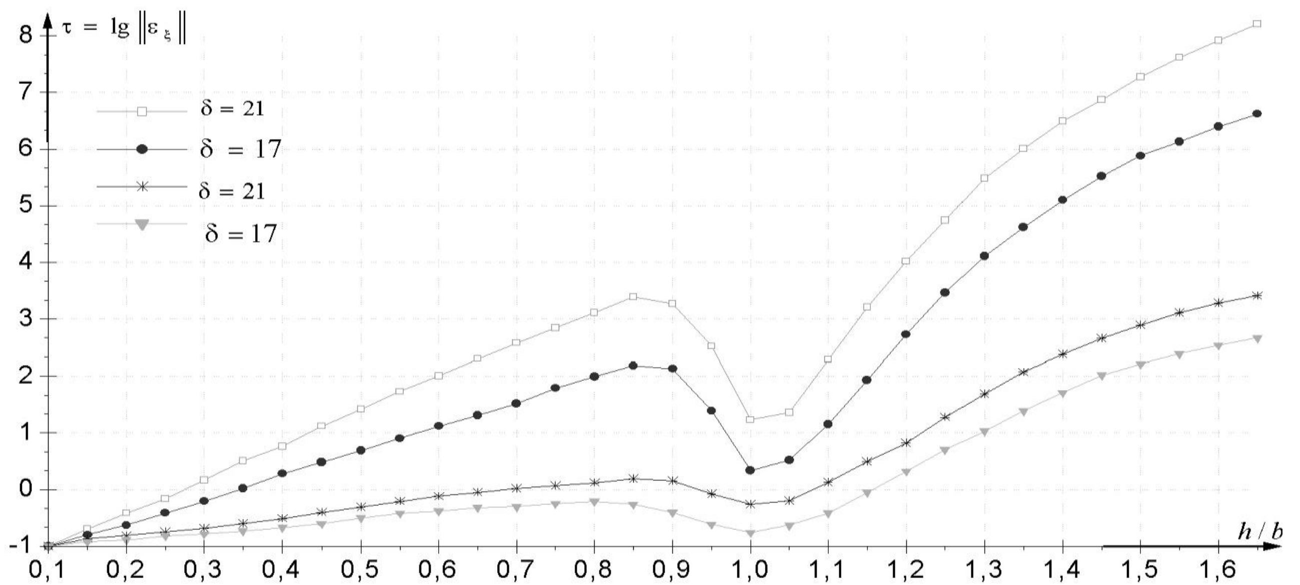
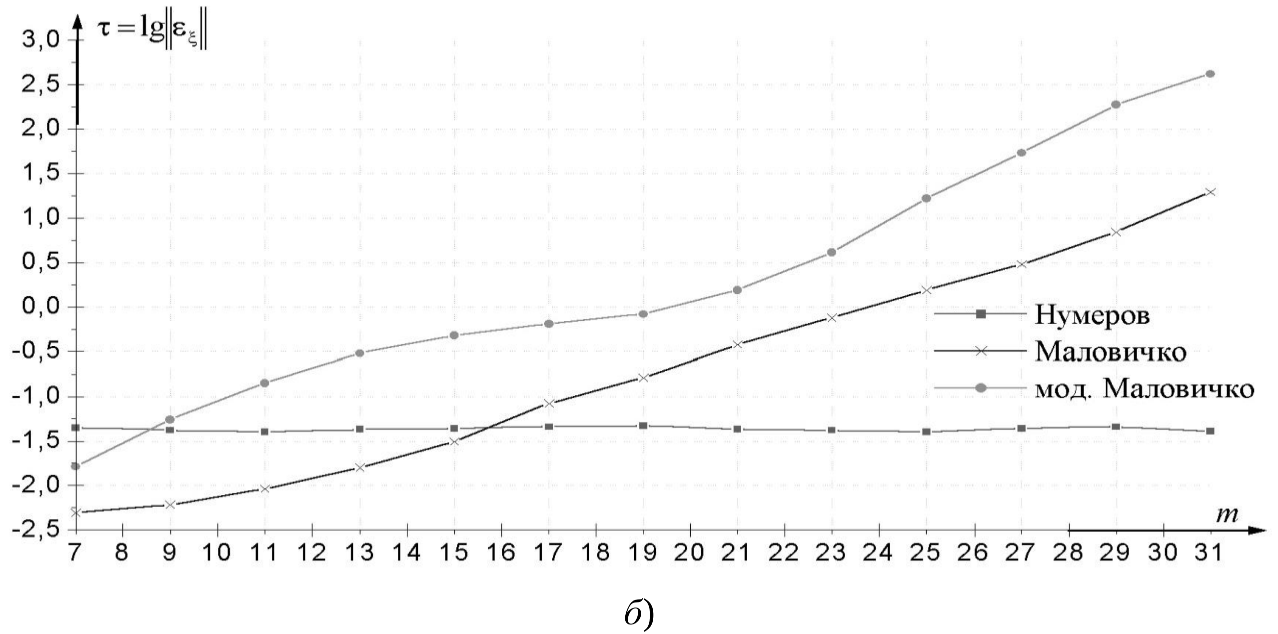


Рис. 4.9. Залежність похибки розв'язку за чисельною схемою Нумерова від її параметрів.



а)



б)

Рис. 4.10. Залежність похибки розв’язку за чисельною схемою Маловичка від: (*а*) параметрів h,δ; (*б*) від параметра *m*.

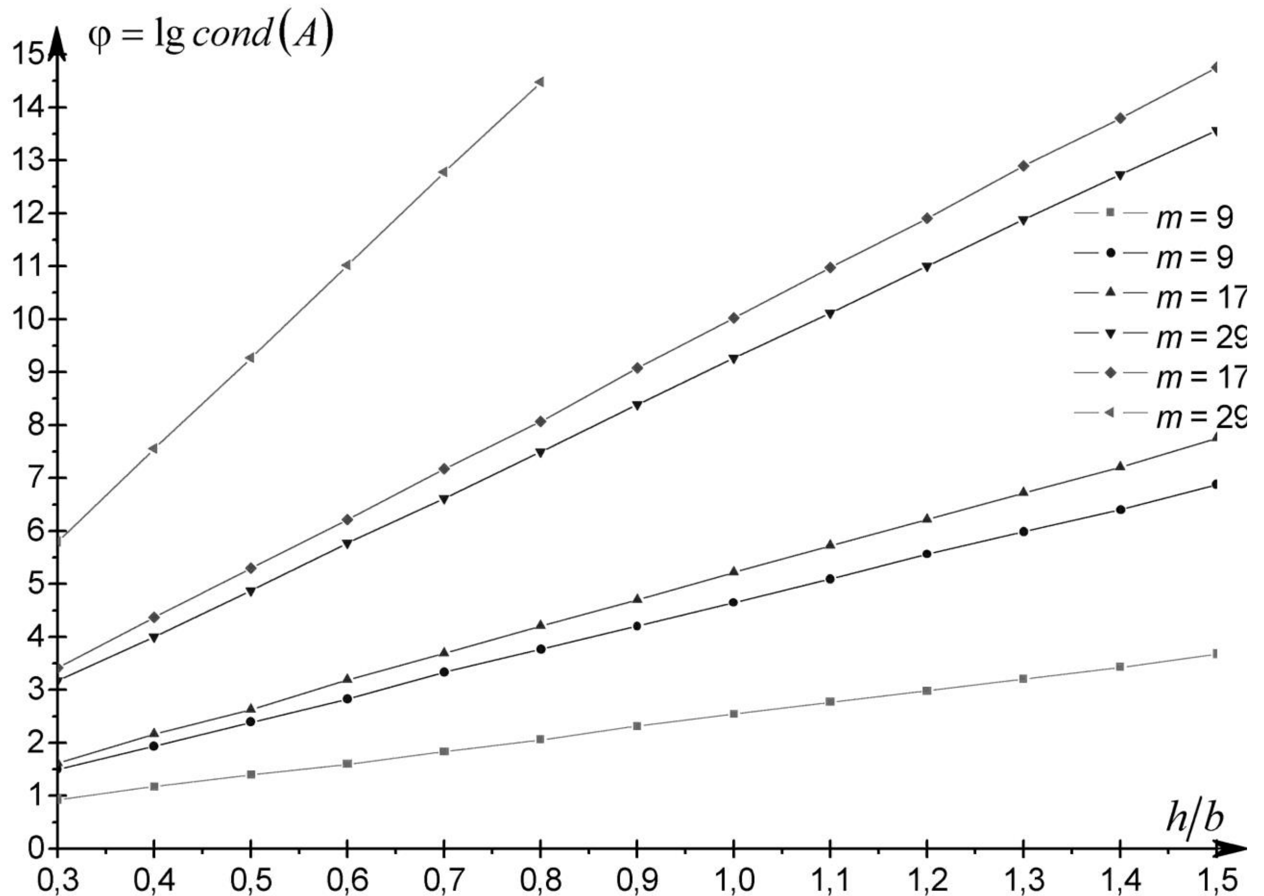


Рис. 4.11. Залежність обумовленості системи Маловичка від параметрів h, m.

Рандомізацію значень поля здійснено за процедурою, яка моделює рівномірний

розподіл випадкових перешкод. Алгоритм Маловичка має сильнішу залежність похибки розв'язку від h і m – порядку розв'язуваної системи рівнянь: в алгоритмі Нумерова вона незалежна від m, а в алгоритмі Маловичка $\tau = \lg\|\varepsilon_\zeta\|$ змінюється від $10^{-2}\|\zeta\|$ до $10^{8}\|\zeta\|$ (у модифікованому варіанті ширше через більшу величину обумовленості системи, прямо пропорційну похибці розв'язку).

Наближення контакту за Нумеровим і Маловичком практично малоефективні: вони залежать від багатьох параметрів чисельних схем, невдалий вибір яких виводять розв'язок за межі допустимості (через накопичення похибок) і навіть вдалий вибір не гарантує достатньої точності (<5%). На це вказує і зростання обумовленості систем $\varphi = \lg cond(A)$ як з ростом параметра m так і з ростом глибини h (див. рис. 4.11). Порівняння за тими ж принципами чисел обумовленості вищезгаданих алгоритмів із виведеними в роботі схемами (2.24) та (3.1) недвозначно вказує на перевагу останніх у цьому плані (рис. 4.12).

Алгоритм Н.Н. Чорної ефективніший за алгоритми Нумерова і Маловичка (рис. 4.13): отримане в ньому за збуреним перешкодами полем наближення контакту (варіанти для довгого і короткого профілів) незалежне від m і на кілька порядків точніше за нумерівське за абсолютно точних значень поля.

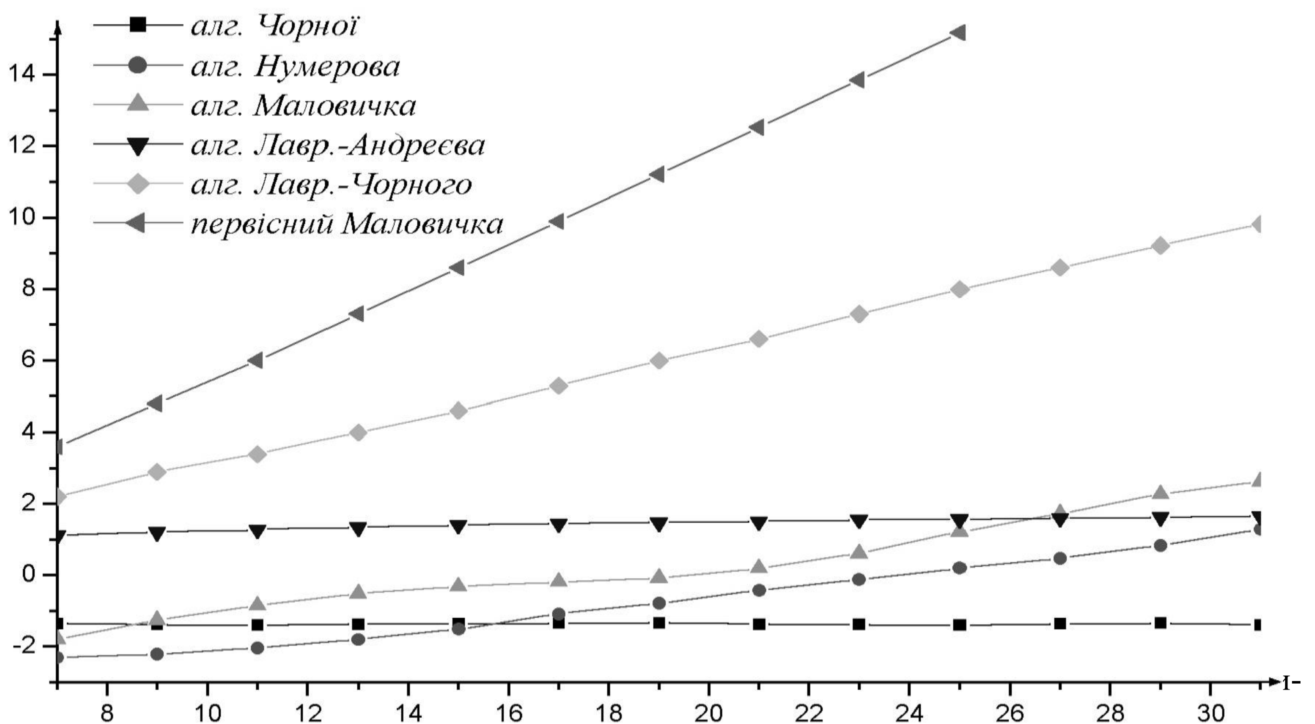


Рис. 4.12. Порівняння обумовленості систем класичних і сучасних алгоритмів.

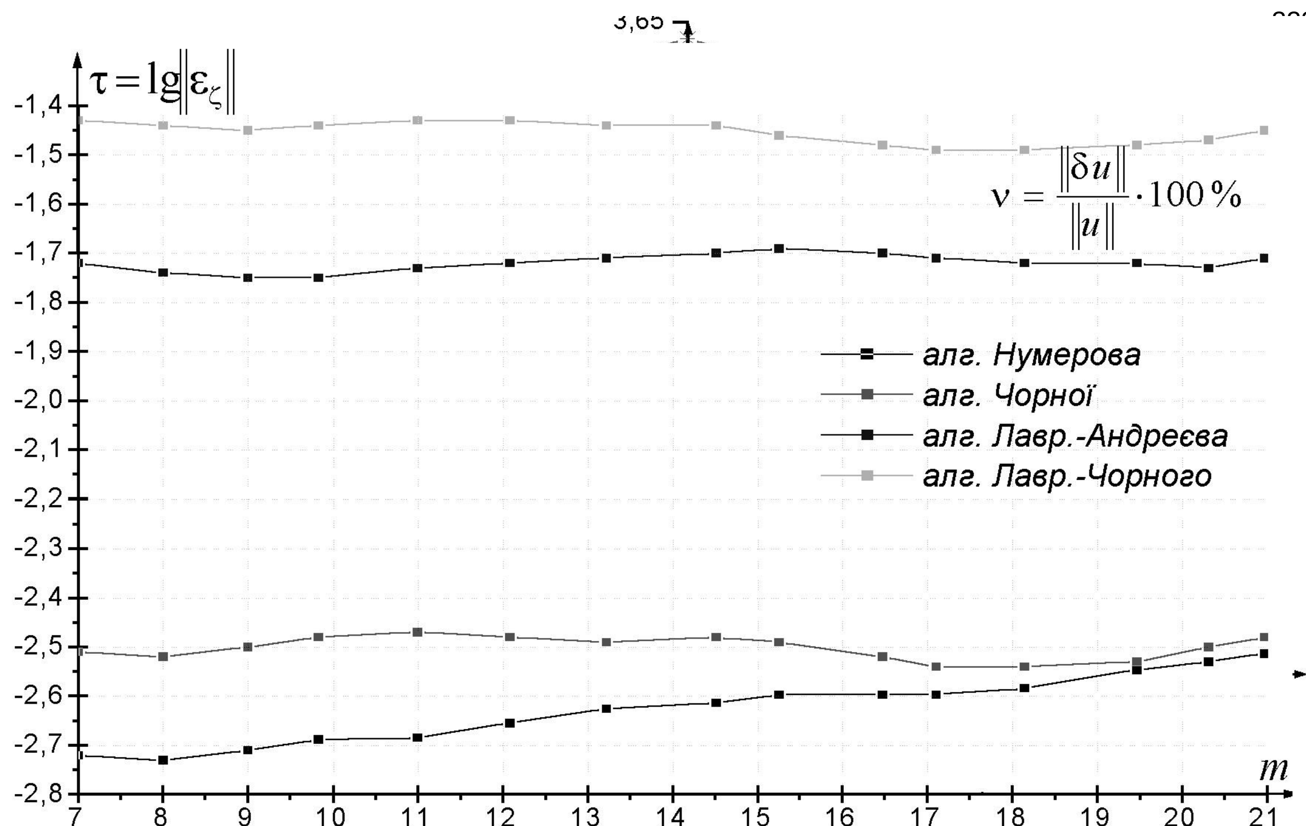


Рис. 4.13. Залежність похибок розв'язку за різними алгоритмми від похибок поля

Алгоритми Лаврентьєва-Андреєва і Лаврентьєва-Ч маюефектив об алгоритмо

.

Рис. 4.14. Модель контакту за "точним полем для алгоритмів Нумерова, Маловичка, Чорної.

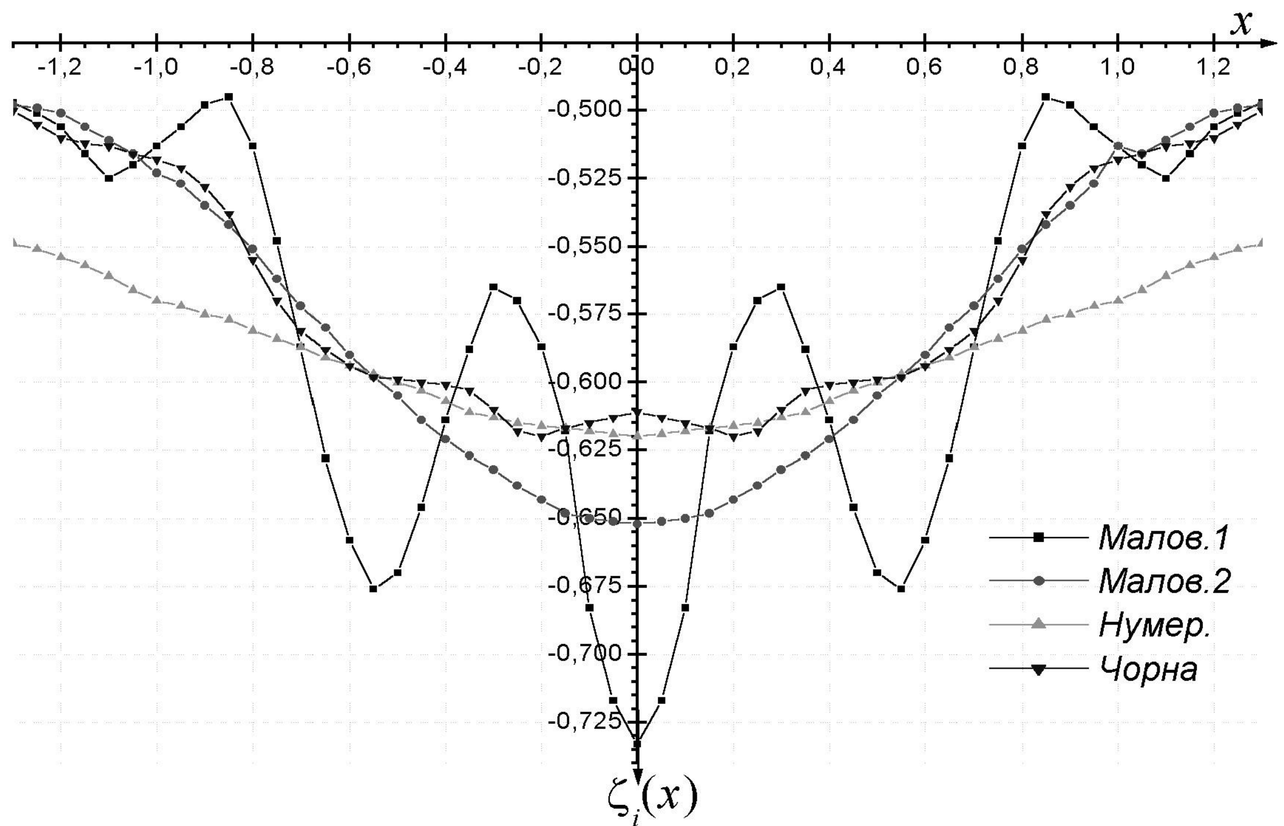


Рис. 4.15. Точність відновлення контакту за алгоритмами Нумерова, Маловичка, Чорної.

За збурень поля до 5% від $U_{\max}$ похибки розв'язку на довгому профілі не перевищують величини $0.06\|\zeta(x)\|$, а на короткому – $0.11\|\zeta(x)\|$.

Алгоритми Лаврентьєва-Андреєва і Лаврентьєва-Чорного мають ще більшу ефективність, а от процес (2.21) співставний за обумовленістю з алгоритмом Нумерова. Низькі його характеристики, мабуть, зумовлені наявністю у виразі “повільних” підінтегральних ядер. Попри вивчені вище обмеження кожного методу порівняння точності розв’язків за розробленими раніше методами на прикладі модельного контакту (4.19) ілюструють[16] рис. 4.14, 4.15. Наближення контакту за алгоритмом Чорної майже співпадають з його точним значенням навіть при $\delta \approx 0.25\% \cdot U_{\max}$, наближення Нумерова і Маловичка при $m = 11$ ухиляються від точного на 6% (модифіковане Маловичка при $m = 9$ – ухиляється вже на 33%)[*]. Досі всі моделі вивчались за умови, що параметри контакту (4.19) $h_1 = k = 1$. Поведінку контакту Чорної (1.4) для інших величин цих параметрів, зокрема $k = 2$ і $h_1 = 1.1; 1.2$ змальовує рис. 4.16

---

[16] Незалежне тестування [101] включає: розгляд недо - і перевизначеної задач, лінійної і нелінійної залежності стовпців матриці, варіація похибок вхідних даних та початкових наближень, кореляційний аналіз і таке інше.

[*] П Рис. 4.15. Точність відновлення контакту за алгоритмам Нумерова, Маловичка, Чорної.

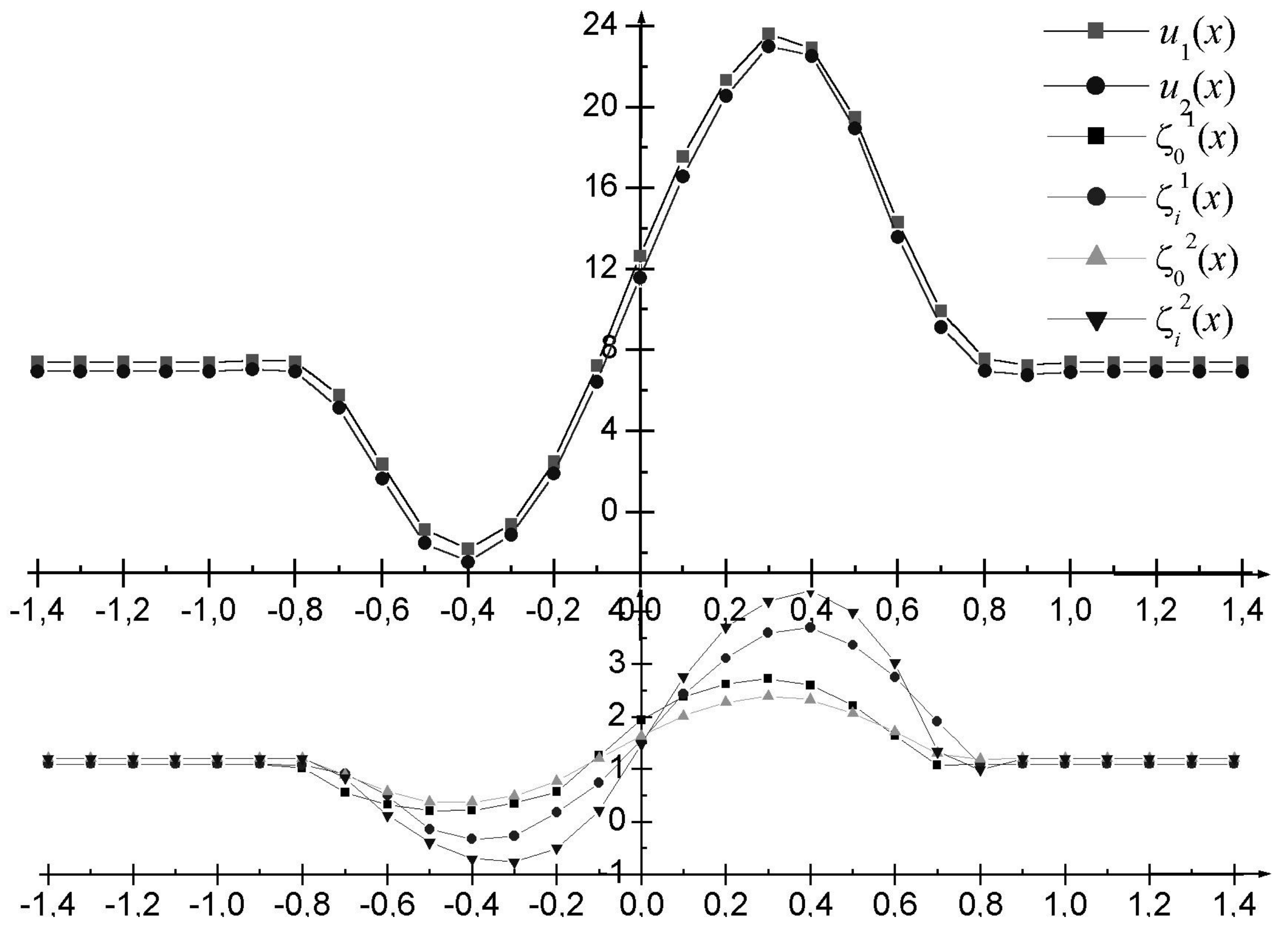


Рис. 4.16. Поведінка контакту (1.4) при різних величинах параметра h_1.

Принципи аналізу похибок (точні розв'язки порівнюють з наближеними в середньоквадратичній нормі при заданих параметрах чисельних схем) запозичені із [142, 146] і основні зусилля зосереджено на дослідженні залежності похибок розв'язку контактної задачі від параметрів чисельних схем (так, похибку оператора моделює приклад 4.2). Загальні риси згаданої залежності ілюструє рис. 4.13, де показано залежність похибки розв'язку $\lg\|\varepsilon_\zeta\|$ контактної задачі за чотирма різними алгоритмами від середньоквадратичної міри δ похибки поля за умови його збурення до 2,5% $U_{\max}$ від порядку розв'язуваної системи рівнянь. Отже, за інших рівних умов наближення контакту, обчислені за алгоритмами Лаврентьєва-Андреєва, Лаврентьєва-Чорного, значно точніші від наближень Нумерова і Чорної. Рис. 4.15 ілюструє результати визначення контакту класичними методами за *збуреними* значеннями поля на противагу *точним* (рис. 4.14), що вказує на їх обмежені можливості. Напрошується подібне порівняння для запропонованих в дисертації методів вирішення інтегральних рівнянь для контактної границі – його проведено вперше (рис. 4.17-20). На кожному графіку для більшої наочності суміщено "точні" і "збурені" криві, тобто рисунки з "точними" полем і контактами *замінено* на суміщені рисунки. За умов 3%-ної відносної похибки поля (це максимальна модельована величина збурення; вже при величині в 5% результати втрачають стійкість, а, отже, і фізичний смисл) очевидною є достатня ефективність цих методів порівняно з їх попередниками.

Деталізувати поведінку похибок можна й по-іншому, наприклад, через відхилення точного розв'язку задачі від знайденого, як це зроблено в монографії [83]. Але в праці [146] дано більш інформативний приклад прямої залежності похибки визначення контакту різними способами від величини випадкових похибок поля. Тому після додаткових обчислень додано новий рис. 4.22, який ілюструє ефективність пропонованих в роботі методів визначення контакту через порівняння згаданої залежності $\lg\|\delta\zeta\| = f(\lg\delta)$ для способів послідовних наближень (3.12) та регуляризації (3.34) алгоритму Н. Чорної та алгоритмів для короткого профілю, пропонованих в дисертації. Нагадаю, що для модельних розв'язків, які обирались за критерієм нев'язки, застосовано регуляризацію 0-го порядку без оптимізації параметра α_d. На цьому малюнку для способів Н. Чорної видно характерний злам залежності $\lg\|\delta\zeta\| = f(\lg\delta)$, який зумовлено залежністю цих розв'язків від параметра регуляризації: чим більша похибка поля δ, тим більше α для регуляризації системи (отже, менша міра обумовленості $cond(A)$). В той же час для алгоритмів (3.1), (3.4) така риса майже нехарактерна – є прямо пропорційне лінійне зростання похибки розв'язку з ростом похибки поля. Але, щоб з певністю стверджувати таку поведінку, слід вивчати польові дані з широким спектром похибок. Якщо ж розглядати наведені приклади без регуляризації, то їх розв'язки, як зазначено в [83, с. 141], втрачають фізичний зміст.

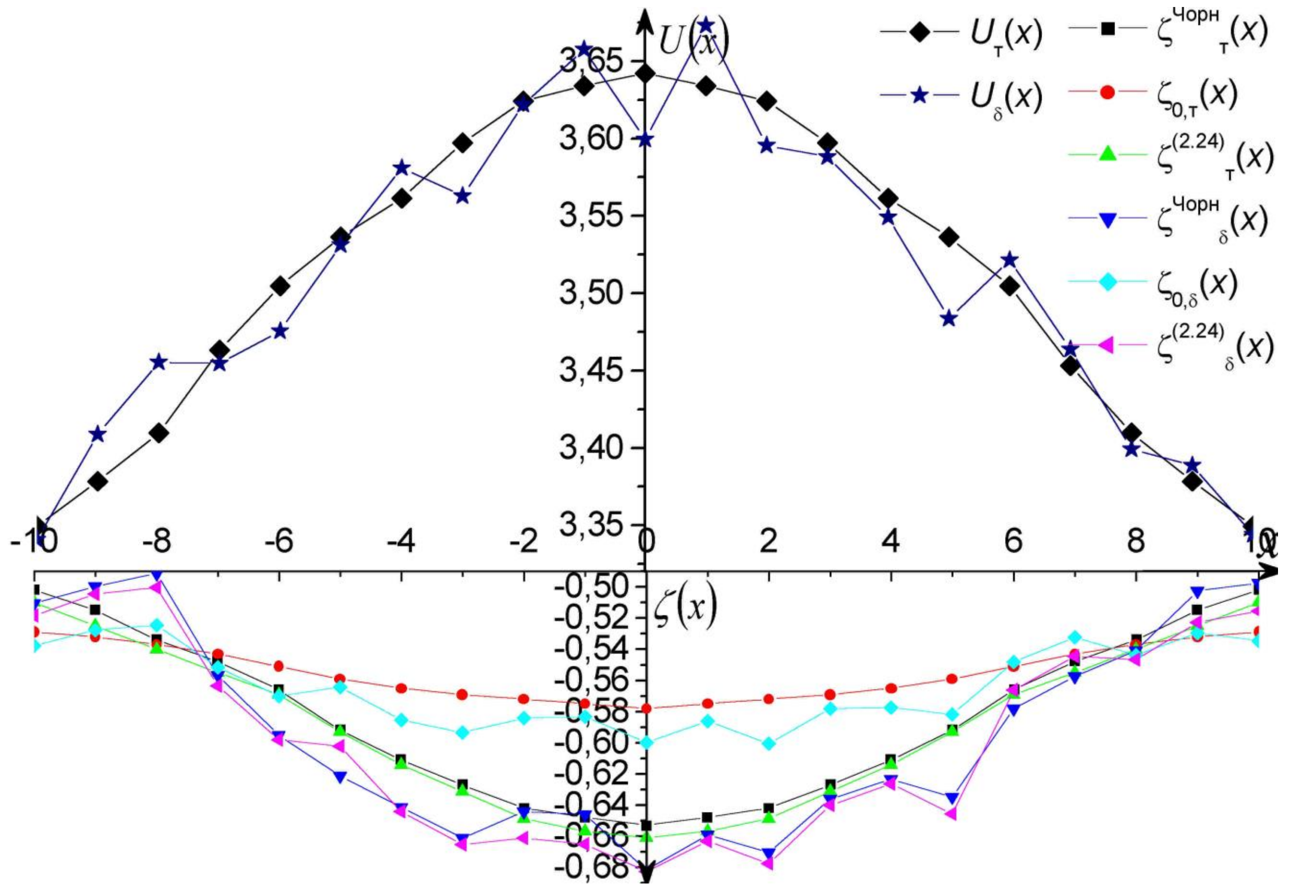


РИС. 4.17. МОДЕЛЬ КОНТАКТУ ЗА АЛГОРИТМОМ

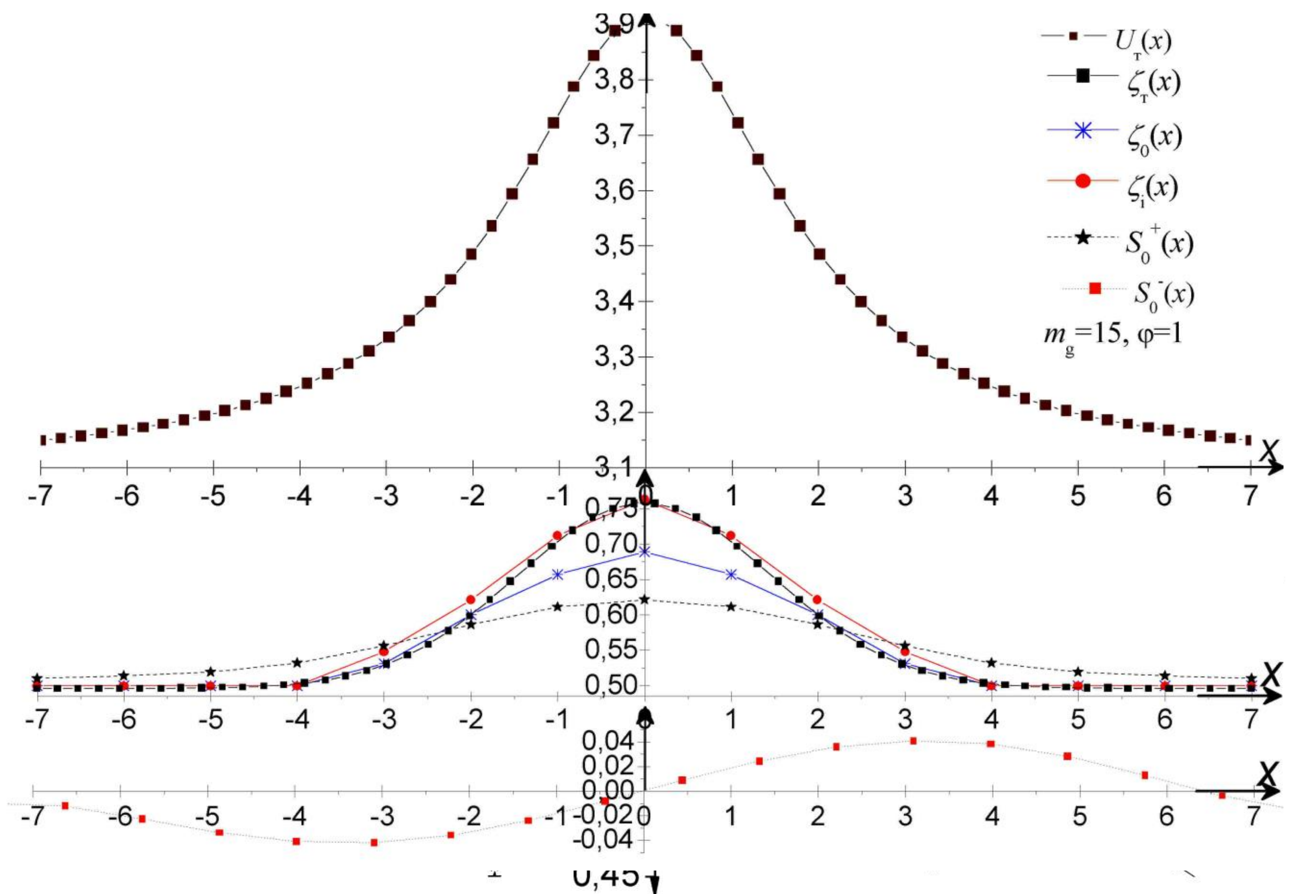
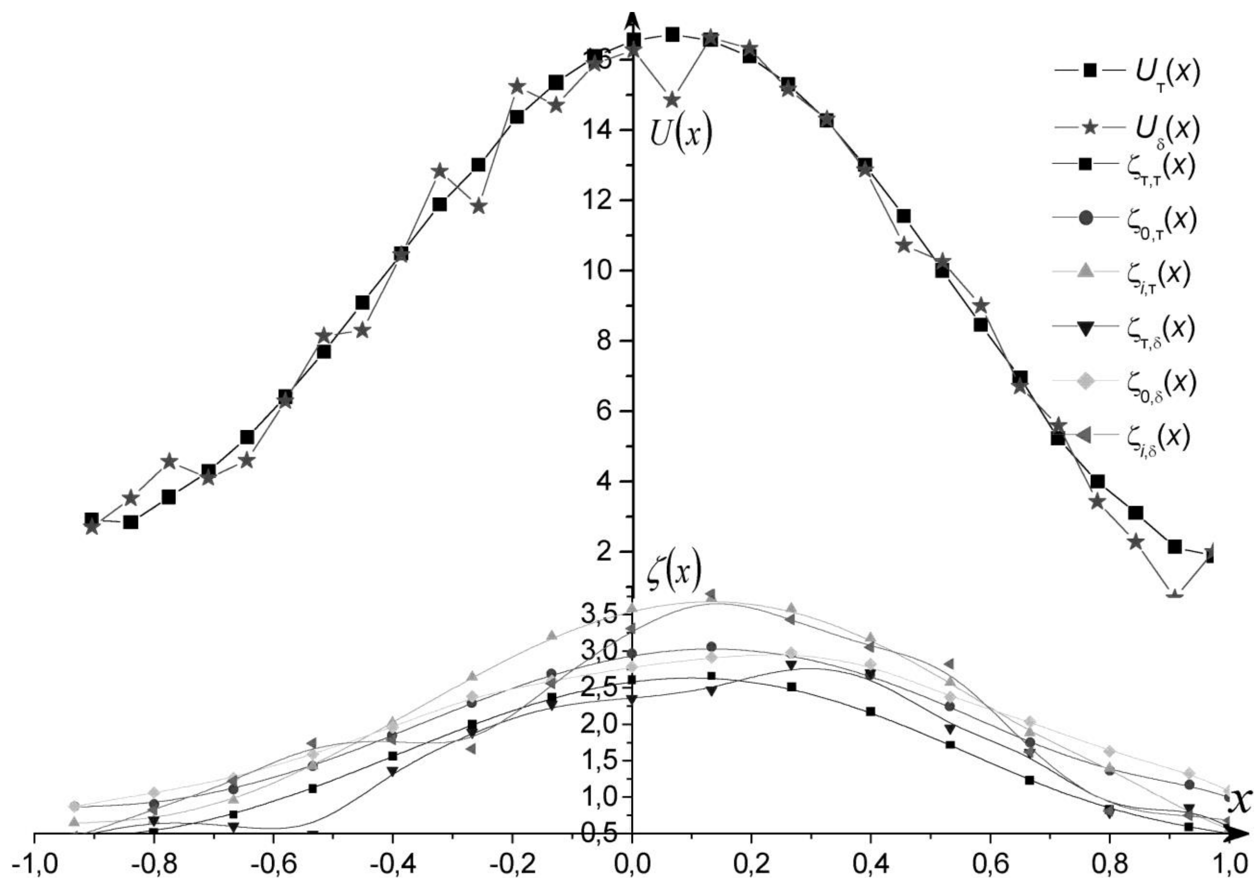


Рис. 4.19. Контакт за алгоритмом Лаврентьєва-Чорного для рівняння (1.40).



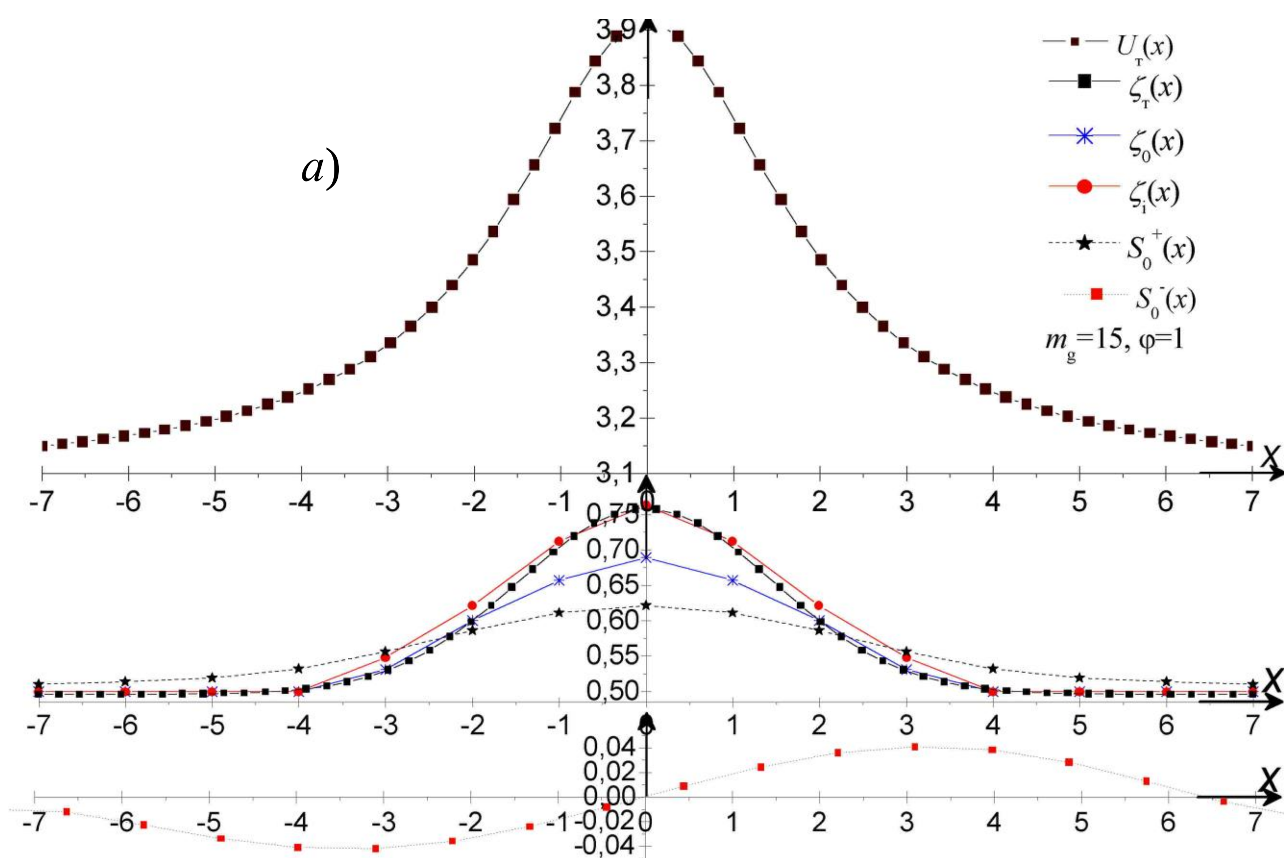
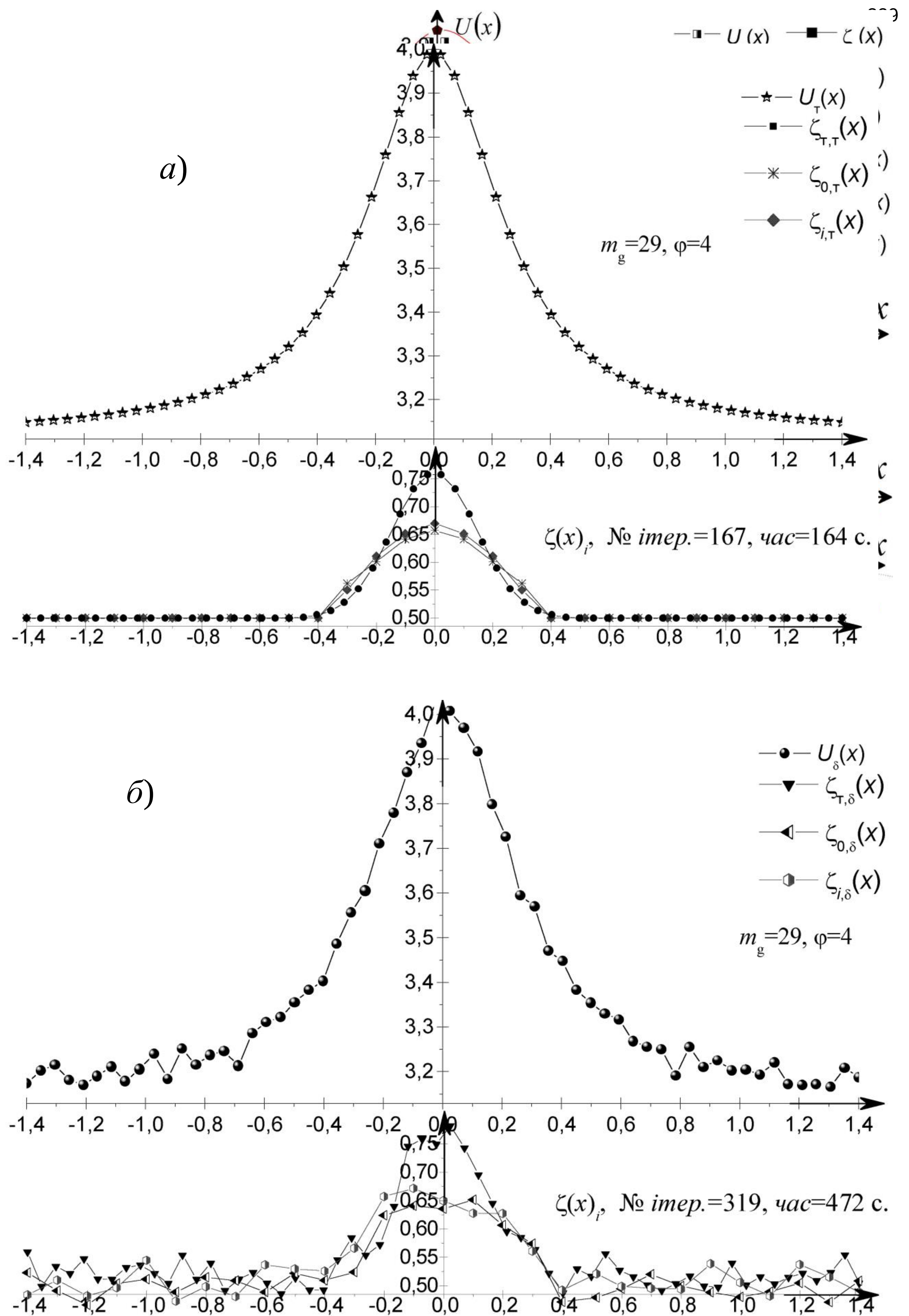


Рис. 4.20. Відновлення контакту за узагальненим алгоритмом Чорного (3.4): а) – за точними значеннями поля; б) – за 3%-збуреними значеннями поля.



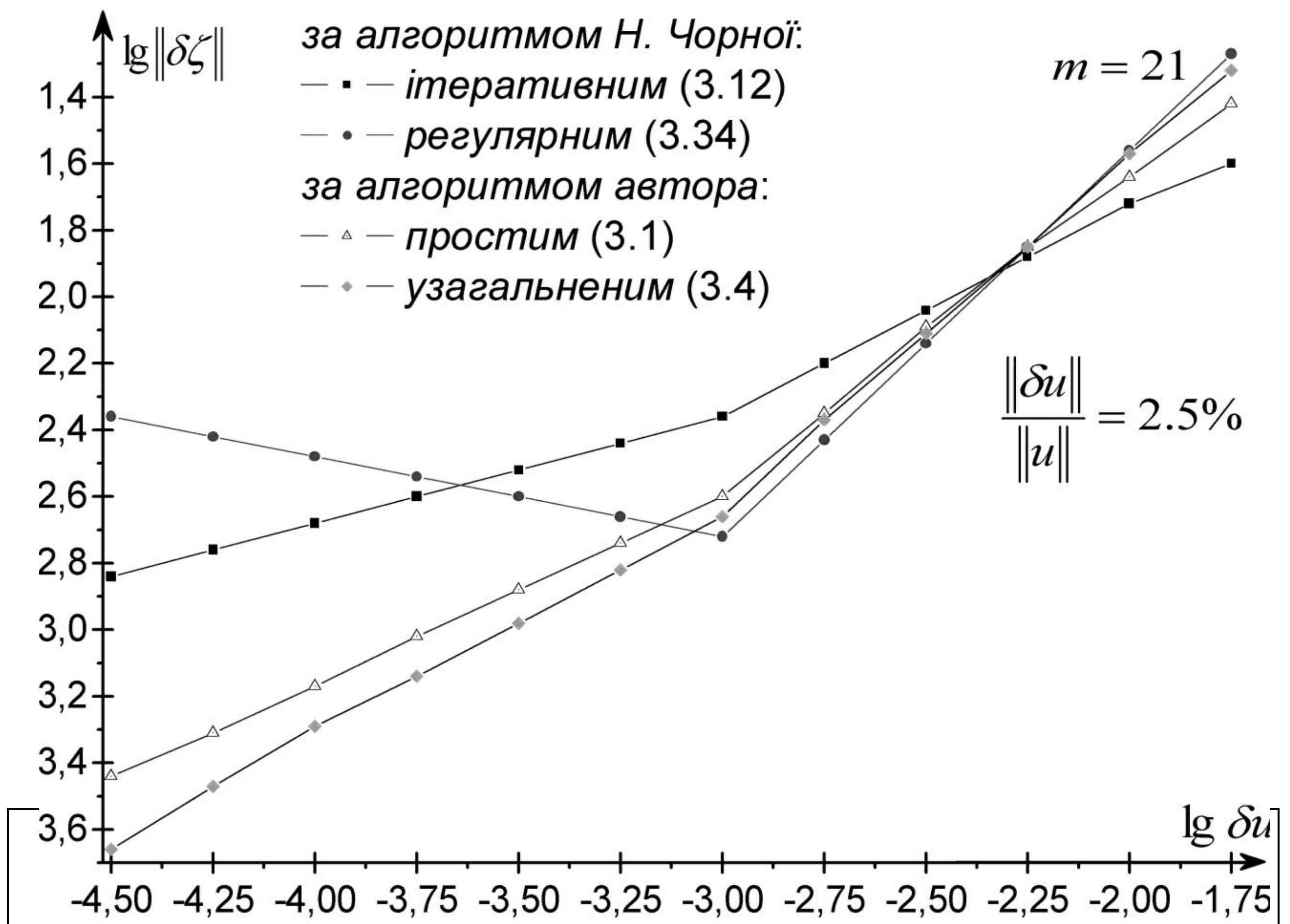
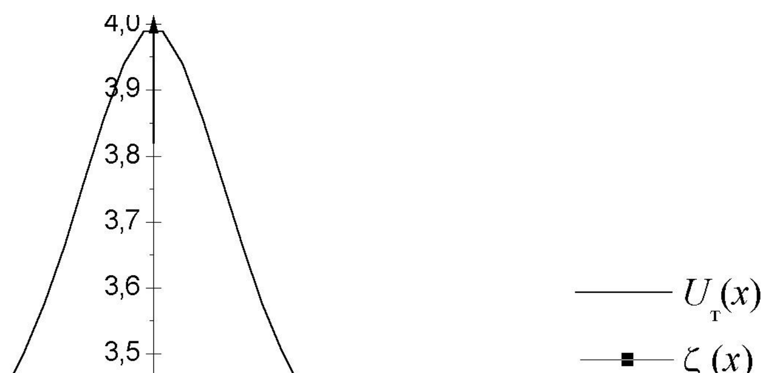


Рис. 4.22. Залежність похибки розв'язку варіацій різних алгоритмів визначення контакту від величини випадкових похибок поля.



Чисельні експерименти виявили, що запропонований алгоритм (2.24) переважає за точністю розв'язки способами Н. Чорної майже удвічі, а (3.1) – майже утричі за вдвічі меншого обсягу обчислень. Цікаво відзначити, що збурені значення поля завжди посилюють коливання контакту і збільшують його абсолютні значення, тобто наближують до денної поверхні. Тому в реальних умовах треба обережно ставитись до розрахунків і максимально враховувати апріорну геологічну інформацію. Основні здобутки в цьому плані ілюструють рис. 4.17-4.21. Рисунок 4.21 с) наводиться лише для "точного" поля, оскільки в загальних рисах поведінка контакту за "збуреним" полем повторює поведінку контактів за алгоритмом (2.24) (див. 4.21а,б). Коротке резюме: розроблені алгоритми мають стійку тенденцію до зниження стійкості при зростанні розмірності вирішуваної системи та величини похибок в її правій частині. Вищесказане дозволяє рекомендувати розроблені алгоритми до опробування і застосування у складі автоматизованих систем типу [18] для моделювання і експрес-аналізу гравіметричних даних на маловивчених територіях.

4.5. НЕВИРІШЕНІ ПИТАННЯ ДИСЕРТАЦІЇ

Алгоритмічно-програмний комплекс має обмежену сферу застосування через спрощеність моделі і постановки задачі. Складність та різноманіття реальних геологічних об'єктів потребує складніших моделей і повнішого врахування апріорних даних, але при цьому ускладнюється вирішення проблем однозначності і стійкості розв'язків. В лінеаризованій постановці їх вирішено "малою кров'ю", проте залишилось немало невирішених питань, розв'язання яких відкладено на перспективу. Зокрема:

- ✓ Не доведено строго для *класу Нумерова* чисельну однозначність[49] розв'язку задачі (4.3) та стійкість розв'язку лінеаризованих рівнянь.
- ✓ Строго не охарактеризовано розв'язаність інтегральних рівнянь – характер відображень множини їх визначення на множину значень.
- ✓ Не вирішено питання природи локальних неоднорідностей поля, врахованих при перевизначенні ядра в ході ітерацій (реальні маси чи похибки вимірів).
- ✓ Лише наполовину дано аналітичне вирішення системи рівнянь (1.30).
- ✓ Модуль неперервності виведено лише для ітерацій Лаврентьєва-Андреєва.
- ✓ Полишене осторонь обґрунтування збіжності послідовних наближень апроксимованих алгоритмів.
- ✓ Не обґрунтовано детально вигляд регуляризуючих алгоритмів.

[49] загалом вона неоднозна через нестрогу опуклість норми нев'язки.

- ✓ Опущено обґрунтування способу визначення добутків $A^*A\zeta(x)$ та $A^*u_\delta(x)$ у рівнянні нев'язки згладжувального функціоналу Тихонова.
- ✓ Не доведено, що саме даний стабілізатор стабілізує конкретну задачу, тобто не очевидні необхідні й достатні умови стабілізації.
- ✓ Не протестовано ефективність "прискореного" алгоритму.
- ✓ Не вивчено залежність $m = f(q, \varepsilon, l)$.
- ✓ Не вивчались чисельні аспекти регуляризованих розв'язків: стійкість до похибок, вплив порядку та параметра регуляризації на похибки, вигляд кожної з похибок, похибки знаходження α, тощо.
- ✓ Не проводились чисельні експерименти щодо способів Андреєва, Малкіна, Сенька, Маловичка та формул Нумерова і Страхова.
- ✓ Не реалізовано програмно просторові варіанти алгоритмів; у цьому напрямі не очікується принципових труднощів, окрім пов'язаних з великим обсягом оброблюваної інформації.
- ✓ Комплекс програм не апробовано на реальних даних; тестові приклади спрощені і призначені для ілюстрації працездатності алгоритмів.

Гадається, є й інші недоліки, та, попри все, розроблений комплекс програм можна рекомендувати для оперативної перевірки гіпотез при експрес-аналізі даних у маловивчених районах і для деталізації розрізів осадових басейнів у комплексі з іншими геофізичними методами. Для детальніших рекомендацій слід експериментально апробувати його на польовому матеріалі. Прикладне значення отриманих теоретичних результатів обмежене сферою інтерпретації локальних аномалій Δg за полем, заданим на *істотно коротких* профілях. Крім того, розроблені регуляризуючі алгоритми універсальні у смислі їх застосовності скрізь, де потрібно отримати стійкі чисельні розв'язки лінійних (за певного удосконалення і нелінійних) задач математичної фізики.

Підсумки 4-го розділу. Контактну задачу зведено до чисельного вирішення ряду інтегральних рівнянь 1-го роду типу (4.2). В результаті скінченновимірної апроксимації цих рівнянь задача (4.2) зводиться до розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь зі збуреними похибками операторами і правими частинами. Окреслено загальну стратегію розв'язування погано обумовлених СЛАР (4.8), до яких за методом проекцій зводяться рівняння типу (4.2). Знайдено послідовність наближених розв'язків $\tilde{\zeta}^{(k)}$ системи (4.8) для двох регуляризованих алгоритмів (4.17), адаптованих до задання попередньо згладженої за правилом (4.15) правої частини на короткому і довгому профілях. Стабілізатор $\Omega(\zeta)$ для відповідного рівняння нев'язки задано у вигляді (4.13) з додатковим обмеженням, яке звужує рамки еквівалентності розв'язків. Регуляризуючі властивості алгоритмів теоретично не обґрунтовувались, але перевірені чисельно.

За розробленими алгоритмами визначено множину оптимальних розв'язків системи (4.8) в рамках

регуляризації за Тихоновим. Особливостями алгоритмів є модернізований принцип знаходження параметра регуляризації α та усунення похибок округлень за методикою чисельної дорегуляризації Чорного (4.15). Це ґрунтовно підвищує точність та достовірність розв'язку оберненої задачі гравіметрії на довгих і *коротких* профілях. Описано узагальнену чисельну схему для обчислень на комп'ютері за дискретизованими алгоритмами, за якою створено пакет FORTRAN-програм. Працездатність алгоритмів проілюстровано модельними прикладами. Шляхом порівняння чисельних розв'язків, отриманих як за відомими класичними методами Нумерова, Маловичка, Чорної, так і за розробленими в даній роботі алгоритмами, вивчено вплив різноманітних похибок на розв'язки і визначено їх ефективність. Загалом, за заданих похибок оператора $\varepsilon \approx 10^{-8}$ і поля $\delta \approx 10^{-5}$ контакт на короткому профілі відновлюється з точністю $\varepsilon_{\zeta} \cong 10^{-7}$, задовільною для геофізичної практики. Насамкінець окреслено невраховані особливості контактної задачі.

ВИСНОВОК

У дисертації наведено *теоретичне узагальнення* і нове вирішення оберненої задачі потенціалу для контактної границі в лінеаризованій постановці. Ця задача вирішена за допомогою зображення зв'язку характеристик геологічного середовища й поля сили тяжіння через інтегральні спввідношення з ядрами, що швидко спадають. В прикладному плані задача спрямована на ефективне визначення контактних границь за полем, заданим на істотно коротких профілях. Головні наукові і практичні досягнення роботи зводяться до таких положень.

✓ Описано математичну модель задачі відновлення контакту на спеціально виділеному класі Нумерова за вертикальними похідними логарифмічного потенціалу у вигляді розв'язків лінеаризованих інтегральних рівнянь Фредгольма 1-го роду. В їх узагальнених модифікаціях усунуто залежність розв'язків від деякого апріорі невідомого параметра h – *середньої глибини* до контакту. Доведено існування і єдиність розв'язків на компактному класі єдиності $Nu^{(1,\alpha)}(1,D)$. Модель задачі легко поширюється на випадок магнітоактивних контактів.

✓ Доведено, що відомі алгоритми, що базуються на виразах з інтегральним ядром Пуассона, не забезпечують прийнятної точності відновлення контакта за полем, заданим на коротких профілях, які властиві практиці спостережень. Для випадку задання значень поля на *істотно короткому* профілі для визначення контактної границі $\zeta(x)$ запропоновано кілька алгоритмів, що базуються на інтегральних рівняннях із швидкозбіжним ядром типу Шварца. На основі рівнянь з ядрами Пуассона і Шварца введено два різних типи задач для відновлення контакту (з параметром h та без нього). Вивчено структуру класу єдиності зазначених рівнянь. Доведено умовну коректність контактної задачі.

✓ Для розв'язання рівнянь кожного типу задач запропоновано збіжні ітераційні процеси Лаврентьєва-Андреєва (2.24) і Лаврентьєва-Чорного (3.1) та їх узагальнені аналоги (2.30) і

(3.4), відповідно. Практичною перевагою останніх є швидша збіжність та можливість задання значень контакту на *короткому* профілі. Збіжність усіх ітерацій обґрунтовано за новим способом, що базується на еквівалентному зображенні підінтегральних виразів в ітераційних процесах через узагальнені функції. Перевагою цього підходу є зручність оконтурення множини коректності розв'язків і досліджень характеристик збіжності.

✓ В ході дослідження вищезгаданих ітерацій поліпшено ітераційні способи уточнення нумерівського наближення контакту, запропоновані свого часу Андреєвим, Малкіним і Сеньком та запропоновано новий спосіб *Нумерова-Маловичка* і обґрунтовано стійкість уточнень. Ці способи можна використати для аналітичних апроксимацій поля в автоматизованих системах інтерпретації.

✓ Надійне визначення контакту на довгих профілях забезпечене ефективним способом екстраполяції значень поля за межі профілю (на основі розкладення вищих похідних відомого інтеграла Пуассона у ряд Тейлора), який зведено до розв'язання лінійного рівняння 1-го роду (3.16)

✓ Для підвищення надійності обчислень запропоновано ефективний спосіб прискорення збіжності ітерацій на підставі математичних характеристик їх збіжності.

✓ Для чисельного вирішення задачі розроблено регуляризуючі алгоритми на базі концепції регуляризації Тихонова. Модернізовано знаходження оптимального параметра регуляризації α, мінімізовано похибки округлень. Створено пакет програм, ефективність яких перевірено на тестових задачах. Порівняння чисельних розв'язків за різними алгоритмами наочно довело перевагу алгоритму (3.1) над алгоритмом (2.24) та їх обох над класичними методами Нумерова, Маловичка. Досягнута точність розв'язку $\varepsilon_\zeta \approx 10^{-5}$ при похибках прямого оператора $\varepsilon_A \approx 10^{-4}$ і спостережень $\delta \approx 10^{-4}$ задовільна для практичних застосувань.

ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. ***Алексидзе М.А.*** Редукция силы тяжести. – Тбилиси: Мецниереба, 1965. – 236 с.
2. ***Алексидзе М.А., Гелашвили М.С., Картвелишвили К.М.*** Исследование некоторых вопросов трансформации потенциальных полей. – Тбилиси: Мецниереба, 1972. – 284 с.
3. ***Алексидзе М.А.*** Приближенные методы решения прямых и обратных задач гравиметрии. – М: Наука, 1987. – 334 с.
4. ***Андреев Б.А.*** Расчеты пространственного распределения потенциальных полей и их использование в разведочной геофизике // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. – 1947. – № 1. – С. 79–92; – 1949. – № 3. – С. 256–267; – 1952. – № 2. – С. 1–30; – 1954. – № 1. – С. 49–64.
5. ***Андреев Б.А., Клушин И.Г.*** Геологическое истолкование гравитационных аномалий. – Л.: Недра, 1965. – 496 с.
6. ***Антонов Ю.В.*** О решении некоторых задач разведочной геофизики с помощью метода аналитического

продолжения // Прикл. геофизика. – 1970. – Вып. **59.** – С. 130–139.

7. *Антонов Ю.В.* Определение границы раздела двух сред с различными плотностями по аномалиям силы тяжести // Развед. геофизика. – 1975. – Вып. **69.** – С. 108–114.

8. *Антонов Ю.В.* Решение обратной задачи гравиразведки для двух контактных поверхностей // Развед. геофизика. – 1978. – **81.** – С. 75–81.

9. *Антонов Ю.В., Жаворонкин В.И., Слюсарев С.В.* Новые возможности грави метрии в изучении геологического строения земной коры // Геофизика. – 1999. – №3. – С. 47–52.

10. *Аронов В.И.* Об оптимальной фильтрации случайных ошибок в гравиметрии // Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли. – 1970. – № 10. – С. 79–85.

11. *Аронов В.И.* Методы восстановления геолого–геофизических полей: сходство, особенности, проблемы // Геофиз. журнал. – 1988. – **10**. – № 3. – С. 3–12.

12. *Аронов В.И.* К вопросу о редуцировании аномалий силы тяжести в горной области // Геофиз. разведка. – 1963. – Вып. **14.** – С. 80–91.

13. *Балк П.И.* Детерминистские модели интерпретации гравитационных полей: Автореф. дис. .. д-ра физ.-мат. наук: 04.00.22 / – Киев, 1989. – 32 с.

14. *Балк Т.В.* Решение обратной задачи гравиметрии для финитной контактной границы с использованием монтажного принципа // Интерпретация гравитационных и магнитных полей. – К.: Наукова думка, 1992. – 246 с.

15. *Бахвалов Н.С.* Численные методы. – М.: Наука, 1973. – 632 с.

16. *Березин И.С., Жидков Н.П.* Методы вычислений. – М.: Наука, 1966. – т. **1**. – 632 с.

17. *Булах Е.Г., Ржаницын В.А., Маркова М.Н.* Применение метода минимизации для решения задач структурной геологии по данным гравиразведки. – Киев: Наук. думка, 1976. – 220 с.

18. *Булах Е.Г.* и др. **М**атематическое обеспечение автоматизированной системы интерпретации гравитационных аномалий. – К.: Наук. думка, 1984. – 112 с.

19. *Булах Е.Г., Маркова М.Н.* Обратная задача гравиметрии для контактных поверхностей // Геофиз. журнал. – 1985 .– **7.** – № 6. – С. 54–62.

20. *Верлань А.Ф., Сизиков В.С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы программы. Справ. пособ. – К.: Наук. думка, 1986. – 544 с.

21. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1979. – 318 с.

22. *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984. – 318 с.

23. *Воскобойников Г.М.* Интегральные преобразования и расположение особенностей логарифмического потенциала // Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли. – 1965. – № 1. – С. 76–89.

24. *Гласко В.Б., Остромогильский А.Х., Филатов В.Г.* О восстановлении глубины и формы контактной поверхности на основе регуляризации // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1970. **– 10,** № 5. – С. 1292–1297.

25. ***Г****ласко В.Б., Володин Б.А., Мудрецова Е.А., Нефедова Н.Ю*. О решении обратной задачи гравиметрии для контактной поверхности методом регуляризации // Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли. – 1973. – № 2. – С. 30–41.

26. ***Г****ласко В.Б., Литвиненко О.К., Мудрецова Е.А., Страхов В.Н., Федынский В. В.* Метод регуляризации А.Н. Тихонова в современной разведочной геофизике // Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли. – 1977. – № 1. – С. 24–39.

27. ***Г****ласко В.Б*. Обратные задачи математической физики. – М.: Изд. МГУ, 1984 . – 112 с.

28. ***Г***равиразведка. – Справочник геофизика /Под ред. *Е.А. Мудрецовой*. – М.: Недра, 1981. – 400 с.

29. *Двайт Г.Б*. Таблицы интегралов и другие математические формулы: Пер. с англ. – М.: Наука, 5-е изд. – 1977. – 228 с.

30. *Денисюк Р.П*. Решение обратной задачи гравиметрии при вертикальном градиенте плотности в пластах // Доп. АН Укр. Сер.**Б**.–1998.– № 5.– С. 122–126.

31. *Денисюк Р.П.* Некоторые вопросы решения обратной задачи гравиразведки для контактных поверхностей // Докл. АН СССР. Сер. **Б**. – 1981. – № 12. – С. 8–10.

32. ***Д***ополнительные главы курса гравиразведки и магниторазведки / *Каратаев Г.И., Голиздра Г.Я., Соловьев О.А. и др*./ Под ред. Э.Э. Фотиади. – Новосиб.: Изд. НГУ, 1966. – 560 с.

33. *Дубовенко Ю.И.* Линейная граничная задача восстановления контакта по значениям поля, заданного на существенно ограниченных множествах // Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей: тезисы 28-й сесии Междунар. семинара им. Д.Г. Успенского (Киев, февраль 2001 г.) – М. ОИФЗ РАН, 2001. – С. 35.

34. *Дубовенко Ю.І.* Відновлення контактної границі в шаруватому середовищі // Геофіз. журнал. – 2002, **24**, № 6. – С. 76–83.

35. *Заморев А.А*. Обратная двухмерная задача теории потенциала // Докл. АН СССР. – 1941. – **31,** № 9. – С. 872–874.

36. *Заморев А.А*. Исследование двухмерной обратной задачи теории потенциала // Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз. – 1941. – № 4–5. – С. 487–500.

37. *Заморев А.А*. Определение формы тела по производным внешнего гравитационного потенциала // Изв. АН СССР. Сер. географ. и геофиз. – 1942. – № 1-2. – С. 48–54.

38. *Захаров С.В*. Интегродифференциальные уравнения теоретической обратной задачи логарифмического потенциала и методы их решения // Интерпретация гравитационных и магнитных полей. – К.: Наукова думка, 1992. – 248 с.

39. ***И****ванов В.К.* Интегральное уравнение обратной задачи логарифмического потенциала // Докл. АН СССР. – 1955. – **105**, № 3. – С. 409–411.

40. ***И****ванов В.К.* О разрешимости обратной задачи логарифмического потенциала в конечном виде // Докл. АН СССР. – 1956. – **106**, № 4. – С. 598–599.

41. ***И****ванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. – М.: Наука, 1978. – 206 с.

42. ***И****дельсон Н.И.* Теория потенциала с приложениями к теории фигуры Земли и геофизике. – М.-Л.: ОНТИ, 1936. – 424 с.

43. ***И****льин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х.* Математический анализ. – М.: Мир, 1979. – 719 с.

44. ***И****саков В.М.* О единственности решения внешней контактной обратной задачи теории логарифмического потенциала // Дифф. уравнения. – 1971. – № 7. – С. 361–365.

45. ***К****анторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 744 с.

46. ***К****аратаев Г.И. и др*. Решение некоторых задач гравиразведки и магниторазведки на ЭЦВМ // Тр. ИГиГ СО АН СССР. – 1963.– **21**. – С. 22–75.

47. ***К****обрунов А.И.* Анализ линейных приближений обратной задачи структурной гравиметрии // Докл. АН Укр. Сер.Б. – 1982. – № 9. – С. 7–9.

48. ***К****обрунов А.И., Денисюк Р.П.* Решение обратной задачи гравиразведки в классе плотностных границ с переменной плотностью на контакте // Изв. ВУЗов. Геология и разведка. – 1982. – № 9. – С. 108–117.

49. ***Л****аврентьев М.М., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Физматгиз, 1958. – 680 с.

50. ***Л****аврентьев М.М., Шишатский В.Г., Романов С.П.* Некорректные задачи ма
тематической физики и анализа. – М.: Наука, 1980. – 288 с.

51. ***Л****аврентьев М.М.* О некоторых некорректных задачах математической физики. – Новосиб.: Изд. СО АН СССР, 1962. – 92 с.

52. ***Л****еонов А.С.* Об устойчивом решении обратной задачи гравиметрии на классе выпуклых тел // Изв. АН СССР. Сер. Физ. Земли. – 1976. – №7. – С. 55–65

53. ***Л****евенков Я.Б.* Повышение точности и скорости сходимости алгоритмов решения обратных нелинейных уравнений: Автореф. дис. к. ф.-м.н.: 04.00.2 / Киев, 1983. – 19 с.

54. ***Л****юстерник Л.А., Соболев В.И.* Краткий курс функционального анализа. – М.: Высшая школа, 1982. – 271 с.

55. ***М****аслов В.П.* Регуляризация некорректных задач для сингулярных интегральных уравнений // Докл. АН СССР. – 1967. – **176**, № 5. – С. 1012–1014.

56. ***М****алкин Н.Р.* О решении обратной магнитометрической задачи для случая одной контактной поверхности при пластообразном залегании масс // Докл . АН СССР. – 1931. – **А**, № 9. – С. 231–235.

57. ***М****аловичко А.К.* Об определении контактной поверхности по гравитационным аномалиям // Прикл. геофизика. – 1948. – **5**. – С. 77–97.

58. ***М****аловичко А.К.* Методы аналитического продолжения аномалий силы тяжести и их приложения к задачам гравиразведки. – М.: Гостоптехиздат, 1956. – 160 с.

59. ***М****орозов В.А*. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. – М.: Наука, 1987. – 240 с.

60. ***М****удрецова Е.А., Филатов В.Г.* Определение глубины залегания, формы, избыточной плотности и участка

модуляции контактной поверхности // Прикл. геофизика. – 1975. – Вып. **78**. – С. 153–158.

61. ***М****удрецова Е.А., Филатов В.Г.* Исследования влияния случайных и систематических погрешностей на погрешность восстановления глубины и формы контактной поверхности // Прикл. геофизика. – 1977. – **88**. – С. 96–101.

62. ***Н****овиков П.С.* О единственности решения обратной задачи потенциала // Докл. АН СССР. – 1938. – **18**, № 3. – С. 165–168.

63. ***Н****овоселицкий В.М.* О построении плотностной границы по аномалиям силы тяжести // Прикл. геофизика. – 1966. – **47**. – С. 120–129.

64. ***Н****умеров Б.В*. Интерпретация гравитационных наблюдений в случае одной контактной поверхности // Докл. АН СССР. – 1930. – № 21. – С. 569–574.

65. ***О****ганесян С.М., Старостенко В.И.* Параметрический функционал А.Н. Тихонова и итерационные методы решения некорректных задач геофизики // Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли. – 1978. – № 1. – С. 63–75.

66. ***О****ганесян С.М., Оганесян М.Г., Старостенко В.И*. Решение 3-D обратной задачи гравиметрии регуляризирующими алгоритмами // Докл. АН УССР. – сер. Б. – 1986. – № 11. – С. 18–22.

67. ***О****ганесян С.М., Старостенко В.И.* О корректности постановки задач геофизики, представленных в виде систем уравнений, и итерационных методах их решения // Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли. – 1978. – № 8. – С. 54–64.

68. ***О****стромогильский А.Х.* О единственности решения обратной задачи теории потенциала // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1969. – **9**. – № 5. – С. 1189–1191; – 1970. – **10**. – № 2. – С. 352–361.

69. ***П****рилепко А.И.* О единственности решения внешней обратной задачи ньютоновского потенциала // Дифф. уравн. – 1966. – **2**. – № 1. – С. 107–123.

70. ***П****рилепко А.И.* К теории обратных задач обобщенных потенциалов: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 04.00.22 / Новосиб. 1968. – 32 с.

71. ***П****рилепко А.И.* О единственности определения формы и плотности тела в обратных задачах теории потенциала // Докл. АН СССР. – 1970. – **193**, № 2. – С. 288–291.

72. ***П****руткин И.Л.* О решении трехмерной обратной задачи гравиметрии в классе контактных поверхностей методом локальных поправок // Изв. АН СССР . Сер. Физика Земли. – 1986. – № 1. – С. 67–77.

73. ***Р****аппопорт И.М.* О плоской обратной задаче теории потенциала // Докл. АН СССР. – 1940. – **28**, № 4. – С. 305–307; УМЖ. – 1950. – **2**, № 2. – С. 38–55.

74. ***Р****исс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. – М.: Мир, 1972. – 588 с.

75. ***С****амохин А.Б., Самохина А.С.* Численные методы и программирование на фортране для PC. – М.: Радио и связь, 1996. – 224 с.

76. ***С****енько А.К.* К интерпретации гравитационных наблюдений по методу интегральных уравнений // Бюлл. нефт. геофиз. – М.–Л.: ОНТИ, 1936. – Вып. **3**. – С. 151–152.

77. ***С****ербуленко М.Г.* Линейные методы разделения потенциальных полей // При ложение некоторых методов

математики к интерпретации геофизических данных. – Новосиб.: Наука СО. – 1967. – С. 5–75.

78. ***С**ергиенко Н.П.* О квадратурно-итеративном методе решения линейных интегральных уравнений // Методы приближенного решения дифференциальных и интегральных уравнений. – Киев: Изд. Ин-та матем. АН УССР, 1973 – С. 265–272.

79. ***С**околовский К.И.* Метод аналитического продолжения двухмерных потенциальных полей при полуограниченном распределении возмущающих масс // Геофиз. сб. АН УССР. – 1969. – **28**. – С. 11–28.

80. ***С**околовский К.И.* К проблеме глубинности грави- и магниторазведки (метод экстраполяции поля с конечного отрезка на бесконечную прямую) // Новые геофизические исследования на Украине. – К.: Наукова думка, 1969. – С. 101–107.

81. ***С**ретенский Л.Н.* Теория ньютоновского потенциала. – М.–Л.: ГИТТЛ, 1946. – 320 с.

82. ***С**ретенский Л.Н.* О единственности определения формы притягивающего тела по значениям его внешнего потенциала // ДАН СССР. – 1954. – **99**. – № 1. – С. 21–22.

83. ***С**таростенко В.И.* Устойчивые численные методы в задачах гравиметрии. – Киев: Наук. думка, 1978. – 228 с.

84. ***С**таростенко В.И., Заворотько А.Н.* Решение обратных задач гравиметрии для нескольких контактных поверхностей // Изв. АН СССР. Физика Земли. – 1982. – № 3. – С. 46–61.

85. ***С**таростенко В.И., Черная Н.Н., **Ч**ерный А.В.* Интегральное уравнение обратной задачи теории логарифмического потенциала для контактной поверхности // Докл. АН УССР. Сер. **Б**. – 1988. – № 2. – С. 25–29.

86. ***С**таростенко В.И., Черная Н.Н., **Ч**ерный А.В.* Условия однозначной разрешимости и устойчивости обратной задачи теории потенциала для контактной поверхности // Докл. АН УССР. Сер. **Б**. – 1988. – № 3. – С. 26–30.

87. ***С**таростенко В.И., Черная Н.Н., **Ч**ерный А.В.* Условия существования решения обратной задачи теории потенциала для контактной поверхности // Докл. АН УССР. Сер. **Б**. – 1988. – № 6. – С. 30–33.

88. ***С**таростенко В.И., Черная Н.Н., **Ч**ерный А.В.* Линеаризованная постановка обратной задачи потенциала для контактной поверхности // Докл. АН УССР. Сер. **Б**. – 1988. – № 7. – С. 17–21.

89. ***С**таростенко В.И., Черная Н.Н., **Ч**ерный А.В.* Характеристические свойства оператора прямой задачи для контактной поверхности // Докл. АН УССР. Сер. **Б**. – 1990. – № 3. – С. 17–20.

90. ***С**таростенко В.И., Черная Н.Н., **Ч**ерный А.В.* Регулярные способы решения уравнения для контактной поверхности // Докл. АН УССР. Сер. **Б**. – 1990. – № 4. – С. 26–29.

91. ***С**таростенко В.И., Черная Н.Н., **Ч**ерный А.В.* Построение регулярного способа решения уравнения для контактной поверхности в случае задания поля на коротком интервале // Докл. АН Укр. Сер. **Б**. – 1988. – № 2. – С. 25–28.

92. ***С**таростенко В.И., Кислинская О.А.* Интеграл Шварца для полосы и его при
ложения в геофизике // Докл. АН Укр. – 1993. – № 10. – С. 126–129.

93. ***С**таростенко В.И., Черная Н.Н., **Ч**ерный А.В.* Обратная задача теории логарифмического потенциала для контактной поверхности // Интерпретация гравитационных и магнитных полей. – К.: Наук. думка, 1992. –

С. 230–236.

94. ***С****таростенко В.И., Черная Н.Н.,* ***Ч****ерный А.В*. Обратная задача гравиметрии для контактной поверхности // Физика Земли. – 1992. – № 6. – С. 48–58; – 1993. – № 7. – С. 47–56; – 1993. – № 7. – С. 57–66.

95. ***С****таростенко В.И., Черная О.А., Черная Н.Н.,* ***Ч****ерный А.В*. О постановке обратных задач логарифмического потенциала определения формы некоторых тел, близких к заданным // Геофиз. журнал. – 1998. – **20**, № 1 – С. 15–25.

96. ***С****таростенко В.И., Черная О.А., Черная Н.Н.,* ***Ч****ерный А.В*. О фундаментальных свойствах операторов прямого соответствия в задачах определения звездных областей, близких к заданным // Геофиз. журнал. – 1998. – **20**, № 3. – С. 3–23.

97. ***С****таростенко В.И., Черная О.А., Черная Н.Н.,* ***Ч****ерный А.В*. Проблемы существования, единственности и устойчивости решений задач определения звездных тел, близких к заданным // Геофиз. журнал. – 1999. – **21**, № 1. – С. 3–19.

98. ***С****таростенко В.И., Черная О.А., Черная Н.Н.,* ***Ч****ерный А.В*. Последовательности линейных интегральных уравнений для восстановления звездных областей, близких к заданным // Докл. НАН Украины. – 1999. – № 2. – С. 135–139.

99. ***С****таростенко В.И., Черная О.А., Черная Н.Н.,* ***Ч****ерный А.В*. О характеристических свойствах операторов прямого соответствия в задачах определения звездных областей, близких к заданным // Докл. НАН Украины. – 1999. – № 5. – С. 146–149.

100. ***С****таростенко В.И., Черная О.А., Черная Н.Н.,* ***Ч****ерный А.В*. Об условиях разрешимости задач определения звездных областей, близких к заданным // Докл. НАН Украины. – 1999. – № 6. – С. 135–138.

101. ***С****таростенко В.И., Пашко В.Ф., Заворотько А.Н.* Опыт решения сильно неустойчивой обратной линейной задачи гравиметрии // Физ. Земли. – 1992. – № 8. – С. 24–44.

102. ***С****трахов В.Н.* Сведение проблемы аналитического продолжения в горизон зонтальный слой к решению линейных интегральных уравнений первого рода типа свертки с быстро убывающими ядрами // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. – 1963. – № 8. – С. 1206–1221.

103. ***С****трахов В.Н.* Об обратной задаче логарифмического потенциала для контактной поверхности // Изв. АН СССР. Сер. Физ. Земли. – 1974. – № 2. – С. 43–65; 1974. – № 6. – С. 39-60.

104. ***С****трахов В.Н.* К вопросу о единственности решения плоской обратной задачи теории потенциала // Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли. – 1972. – № 2 . – С. 38–49.

105. ***С****трахов В.Н.* Основное функциональное уравнение плоской обратной задачи потенциала и нелинейный метод аналитического продолжения двухмерных потенциальных полей // Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли. – 1971. – № 4. – С. 48–57.

106. ***С****трахов В.Н.* К теории логарифмического потенциала при переменной плотности возмущающих масс // Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли. – 1975 . – № 12. – С. 61–69.

107. ***С****трахов В.Н.* Об условиях однозначного определения границ раздела двухмерных слоистых сред по данным

гравитационных наблюдений // Докл. АН Укр. Сер. Б. – 1975. – № 12. – С. 1086–1091.

108. *Страхов В.Н.* К теории структурной гравиметрии // Прикл. геофизика. – 1972. – Вып. **68**. – С. 119–138.

109. *Страхов В.Н.* Об интегральных и функциональных уравнениях некоторых обратных задач теории логарифмического потенциала и их значении для интерпретации гравитационных и магнитных аномалий // Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли. – 1976. – № 3. – С. 54–66.

110. *Страхов В.Н.* Некоторые применения функционально-аналитических методов в математической теории интерпретации гравитационных и магнитных аномалий: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 04.00.22 / Мос. Ун-т. – М., 1972. – 78 с.

111. *Страхов В.Н.* Алгоритмы редуцирования и трансформаций аномалий силы тяжести, заданных на физической поверхности Земли // Интерпретация гравитационных и магнитных полей. – 1992. – С. 4–81.

112. *Страхов В.Н.* Нерешенные проблемы математической теории плоской задачи гравиметрии и магнитометрии // Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли. – 1979 – № 8. – С. 28–46.

113. *Страхов В.Н.* Математический аппарат, используемый при конструировании алгоритмов нахождения устойчивых приближенных решений СЛАУ, возникающих в задачах гравиметрии и магнитометрии // Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей. – М.: ОИФЗ РАН, 1997. – С. 43–75.

114. *Страхов В.Н.* К вопросу неоднозначности решения обратной задачи гравиметрии // Прикл. геофизика. – 1972. – **69**. – С. 115–140.

115. *Страхов В.Н.* О регуляризации метода наименьших квадратов // Геофиз. журнал. – 1998. – **20**, № 6. – С. 18–38.

116. *Страхов В.Н.* Эквивалентность в плоской задаче гравиметрии при переменной плотности масс // Изв. АН СССР. Физика Земли. – 1977. – № 5. – С. 48–60.

117. *Страхов В.Н., Иванов В.К.* Региональный конечно-разностный алгоритм аномального продолжения потенциальных полей // Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики. – Новосиб.: Наука СО, 1983. – С. 135–142.

118. *Страхов В.Н.* Критический анализ классической теории линейных некорректных задач // Геофизика. – 1999. – № 3. – С. 3–9.

119. *Страхов В.Н., Страхов А.В.* Основные методы нахождения устойчивых приближенных решений СЛАУ, возникающих при решении задач гравиметрии и магнитометрии. Ч.1. – М.: ОИФЗ РАН, 1999. – 40 с.

120. *Тихонов А.Н.* Об устойчивости обратных задач // Докл. АН СССР. – 1943. – **39**, № 5. – С. 195–198.

121. *Тихонов А.Н., Гласко В.Б.* О применении метода регуляризации в задачах геофизической интерпретации // Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли. – 1975. – № 1. – С. 38–48.

122. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Н.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979. – 288 с.

123. *Тодоров И.Т., Зидаров Д.П.* О единственности определения формы притя гивающего тела по значениям его внешнего потенциала // Докл. АН СССР. – 1958. – **120**, № 2. – С. 262–264.

124. ***Т**реногин В.А*. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 496 с.

125. ***У**рысон П.С.* Об одном типе линейных интегральных уравнений // Матем. сб. – 1924. – **31**. – С. 236–255.

126. ***У**эрмер Дж.* Теория потенциала. – М.: Мир, 1980. – 132 с.

127. ***Ф**едорова Н.В., Цирульский А.В*. К вопросу о разрешимости обратной задачи логарифмического потенциала для контактной поверхности в конечном виде // Изв. АН СССР. Физика Земли. – 1976. – № 10. – С. 61–72.

128. ***Ф**илатов В.Г.* О единственности решения некоторых обратных задач гравиразведки // Изв. АН СССР. Физика Земли. – 1974. – № 11. – С. 97–101.

129. ***Ф**илатов В.Г., Антонов Ю.В*. Решение обратной задачи гравиметрии для двух контактных поверхностей // Прикл. геофиз. – 1979. – **94**. – С. 136–140.

130. ***Ф**илатов В.Г.* Решение обратной задачи гравиметрии для двух контактных границ на основе выметания и концентрации масс // Прикл. геофизика. – 1981. – **99**. – С. 90–98.

131. ***Х**ачай О.А., Цирульский А.В.* Об интерпретации повысотных аэромагнитных наблюдений// Изв. АН. Физика Земли. – 1988. – № 12. – С. 47–56.

132. ***Ц**ирульский А.В., Сиротин М.Н.* К вопросу об аналитическом продолжении логарифмического потенциала // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. – 1964. – № 1. – С. 33–37.

133. ***Ц**ирульский А.В*. О связи задачи об аналитическом продолжении логарифмического потенциала с проблемой определения границ возмущающей области // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. – 1964. – № 11. – С. 1693–1696.

134. ***Ц**ирульский А.В*. О единственности решения обратной задачи теории потенциала // Изв. АН СССР. Физика Земли. – 1969. – № 6. – С. 60–65.

135. ***Ц**ирульский А.В., Никонова Ф.И*. К вопросу о разрешимости обратной задачи логарифмического потенциала в конечном виде // Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли. – 1975. – № 5. – С. 37–46; – 1976. – № 10. – С.

136. ***Ц**ирульский А.В., Никонова Ф.И., Федорова Н.В*. Метод интерпретации гравитационных и магнитных аномалий с построением эквивалентных семейств решений – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1980. – 136 с.

137. ***Ц**ирульский А.В*. Вопросы теории и методы интерпретации потенциальных полей. – Л.: ЛГИ, 1989. – 96 с.

138. ***Ч**ередниченко В.Г.* О разрешимости “в малом” обратной задачи логарифмического потенциала // Дифф. уравнения. – 1975.– **11**, № 1. – С. 16 1–169.

139. ***Ч**ередниченко В.Г.* Обратная задача для потенциала слоистых сред в двухмерном случае // Дифф. уравнения. – 1978. – **14**, № 1. – С. 140 –147.

140. ***Ч**орна О.А*. Дослідження оберненої задачі логарифмічного потенціалу визначення зірчастих тіл, близьких до заданих: Автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 04.00.22 / ІГФ. – Київ, 1999. – 18 с.

141. ***Ч**ерная О.А*. Вариационный принцип отбора допустимых решений задач восстановления звездных областей, близких к заданным // Докл. НАН Украины. – 2000. № 2. – С. 128–131.

142. ***Ч**ерная Н.Н.* Исследование обратной задачи логарифмического потенциала для контактной поверхности: Автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук: 04.00. 22 / ИГФ, Киев, 1990. – 16 с.

143. ***Ч**ерный А.В*. Регуляризация численных решений систем линейных уравнений в задачах геофизики // Геофиз.

журнал. – 1981. – **3**, № 3. – С. 62–76.

144. ***Ч****ерный А.В*. О численном решении возмущенных систем линейных урав нений в задачах интерпретации данных геофизики // Докл. АН Укр. Сер. Б. – 1980. – № 12. – С. 34–38.

145. ***Ч****ерный А.В*. О точности численных решений некоторых задач геофизики // Теория и практика интерпретации гравитационных и магнитных полей в СССР. – К.: Наук. думка, 1983. – С. 263–290.

146. ***Ч****ерный А.В. и др*. Граничные задачи теории интерпретации данных грави метрии: Отчет о НИР (окончат.) / ИГФ НАНУ. – № гос. регистр. 01.86.0083184, инв. № 218285. – Киев, 1990. – 348 с.

147. ***Ч****ерный А.В*. Избранные задачи гравиметрии и гравиразведки и методы их решения: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 04.00.22 / ИГФ. – Киев, 1992. – 34 с.

148. ***Ч****ерный А.В., Дубовенко Ю.И*. Восстановление контакта при задании поля на существенно ограниченных множествах // Геофиз. журн. – 2001. – **23**, № 6. – С. 62–71.

149. ***Ч****орний А.В., Дубовенко Ю.І.* Про структурну задачу гравіметрії // Геофізичний моніторинг небезпечних геологічних процесів та екологічного стану геологічного середовища: тези II Міжнар. конф. молодих вчених (Київ, жовтень 2001 р.). К.: Вид-во КУ, С. 60.

150. ***Ч****орний А.В., Дубовенко Ю.І.* Дослідження оберненої задачі потенціалу для контактної поверхні // Геофіз. журнал, 2002, **24**, № 3. – С. 77–92.

151. ***Ч****орний А.В., Дубовенко Ю.І.* До теорії структурної задачі гравіметрії в комплексній площині // Доп. НАН України, 2002, № 4. – С. 145-149.

152. ***Ч****орний А.В., Дубовенко Ю.І.* Уточнення деяких способів визначення контактної границі // Доп. НАН України, 2002, № 12. – С. 99-102.

153. ***Ч****ерный А.В., Якимчик А.И*. Восстановление потенциала по значениям модуля его градиента. 1. // Геофиз. журнал. – 1999. – **21**, № 3. – С. 55–72.

154. ***Ч****ерный А.В., Черная Н.Н*. Об аппроксимации гравитационных и магнитных аномалий, приближенно заданных на сложном рельефе в узлах нерегулярной сети // Геофиз. сб. АН СССР. – 1977. Вып. **80**. – С. 64–75.

155. ***Ш****алаев С.В*. Применение функций комплексного переменного при геологическом истолковании гравитационных и магнитных аномалий // Тр. ИГиГ СО АН СССР. – 1960. – Вып. **1**. – С. 42–58.

156. ***Ш****ашкин Ю.А*. О единственности в обратной задаче теории потенциала // Докл. АН СССР. – 1957. – **115**, № 1. – С. 64–66.

157. ***Ш****ванк О.А., Люстих Е.Н.* Интерпретация гравитационных наблюдений. – М.-Л.: Гостоптехиздат, 1947. – 400 с.

158. ***Я****кимчук Н.А*. Пространственное восстановление гравитационных и магнитных полей для дистанционных исследований Земли: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 04.00.22 / Киевский ун-т. – Киев, 1996. – 32 с.

159. ***B****hattacharyya B.K., Leu L.–K.* Spectral analysis of gravity and magnetic anomalies due to 2–D structures // Geophysics. – 1975.– **40**, № 6. – P. 993–1013.

160. *B. **P**edersen L.* Generalized inversion in the interpretation of potential fields // Geophys. prospecting. – 1977. – **25**, № 2. – P. 199–230.

161. ***B**jerhammar A.* On gravity // Royal Institute of Technology. – Stocholm, 1968. – 130 p.

162. ***H**ughes D.* The analitic basis of gravity interpretation // Geophysics. – 1942. – **7**, № 2. – P. 169–178.

163. ***J**ackson D.D.* Interpretation of inaccurate, insufficient & inconsistent data // Geo phys. J. of the Roy. Astr. Soc. – 1972. – **28**, № 1. – P. 97–109.

164. ***P**enrose R.* A generalised inverse for matrices // Proc. Camb. Phil. Soc. – 1955. – **51**. – P. 406–413.

165. ***R**ainboy H.* The interpretation of torsion balanse data // Proc. of 1-st World Petr. Congr., London. – 1933. – **1**. – P. 19–25.

166. ***R**uotoistemaki T.* The gravity anomaly of 2-D sources with continuous density distribution and bounded by continuous surfaces // Geophysics. – 1992. – **57**, № 4. – P. 623–628.

167. ***X**ia J., Sprowl D.R.* Inversion of potential field data by iterative forward modelling in the wavenumber domain // Geophysics. – 1992. – **5 7**, № 1. – P. 126–130.

Прийняті скороченні:

М – Москва; **Л** – Ленінград; **К** – Київ; **В** – Воронеж.

Додаток А
ВИВЕДЕННЯ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ (1.30) ДЛЯ ВИЗНАЧЕНЯ КОНТАКТУ

за полем, заданим на істотно обмежених профілях

1°. Перетворення Фур'є від функції $u(x,0)$ має вигляд

$$w(\omega,0)=\int_{-\infty}^{\infty}u(x,0)\cdot e^{i\omega x}dx=\int_{-\infty}^{\infty}u(x,0)\cdot\cos\omega x dx+i\cdot\int_{-\infty}^{\infty}u(x,0)\cdot\sin\omega x dx=u_c(\omega,0)+i\cdot u_s(\omega,0),$$

тоді як перетворення Фур'є від функції $u(x,-h)=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{h}{h^2+(\xi-x)^2}\cdot u(\xi,0)d\xi$, в якій зроблено заміну змінних $\xi-x=\upsilon, x=\xi-\upsilon, dx=-d\upsilon$, матиме вигляд

$$w(\omega,-h)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega x}dx\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}\cdot u(\xi,0)d\xi=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(\xi,0)d\xi\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+\upsilon^2}\cdot e^{i\omega(\xi-\upsilon)}d\upsilon=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(\xi,0)\cdot e^{i\omega\xi}d\xi\cdot\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+\upsilon^2}\cdot\cos\omega\upsilon d\upsilon+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+\upsilon^2}\cdot\sin\omega\upsilon d\upsilon\right\}=w(\omega,0)\cdot e^{-\omega h},\omega\geq 0.$$

Оскільки $w(\omega,-h)=w(\omega,0)\cdot e^{-\omega h},\omega\geq 0$, то косинус-перетворення $u_c(\omega,-h)=u_c(\omega,0)\cdot e^{-\omega h}$ та синус-перетворення $u_s(\omega,-h)=u_s(\omega,0)\cdot e^{-\omega h},\omega\geq 0$, відповідно, оскільки попередній вираз можна подати таким чином

$$u_c(\omega,-h)+i\cdot u_s(\omega,-h)=[u_c(\omega,0)+i\cdot u_s(\omega,0)]\cdot e^{-\omega h},\omega\geq 0.$$

***Зауваження* 1**. Інтеграл Пуассона при $\omega\geq 0$ має косинус-перетворення Фур'є

$$u_c(\omega,-h)=\int_{-\infty}^{\infty}u(x,-h)\cdot\cos\omega x dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(\xi,0)d\xi\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}\cdot\cos\omega x dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(\xi,0)d\xi\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+\upsilon^2}\cdot\cos\omega(\xi-\upsilon)d\upsilon=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(\xi,0)\cdot\cos\omega\xi d\xi\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+\upsilon^2}\cdot\cos\omega\upsilon d\upsilon+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(\xi,0)\cdot\sin\omega\xi d\xi\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+\upsilon^2}\cdot\sin\omega\upsilon d\upsilon=\frac{2h}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(\xi,0)\cdot\cos\omega\xi d\xi\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\omega\upsilon}{h^2+\upsilon^2}d\upsilon=\frac{2h}{\pi}u_c(\omega,0)\cdot\frac{\pi}{2h}\cdot e^{-\omega h}$$

та синус-перетворення Фур’є

$$u_s(\omega,-h)=\int_{-\infty}^{\infty}u(x,-h)\cdot\sin\omega x dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(\xi,0)d\xi\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}\cdot\sin\omega x dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(\xi,0)\cdot\sin\omega\xi d\xi\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+\upsilon^2}\cdot\cos\omega\upsilon d\upsilon-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(\xi,0)\cdot\cos\omega\xi d\xi\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+\upsilon^2}\cdot\sin\omega\upsilon d\upsilon=u_s(\omega,0)\cdot e^{-\omega h}.$$

На основі цих перетворень отримуєм наступні рівності

$$u_c(\omega,-h)=u_c(\omega,0)\cdot e^{-\omega h},u_c(\omega,h)=u_c(\omega,0)\cdot e^{\omega h},\quad u_s(\omega,-h)=u_s(\omega,0)\cdot e^{-\omega h},u_s(\omega,h)=u_s(\omega,0)\cdot e^{\omega h},$$

або в початкових позначеннях

$$w(\omega,-h)=w(\omega,0)\cdot e^{-\omega h},w(\omega,h)=w(\omega,0)\cdot e^{\omega h},\omega\ge 0. \qquad (А.1)$$

Зауважмо, що

$$u(x,0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u_c(\omega,0)\cdot\cos\omega x d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u_s(\omega,0)\cdot\sin\omega x d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(\xi,0)d\xi\int_{-\infty}^{\infty}\cos\omega(\xi-x)d\omega.$$

З першої групи рівностей можна послідовно утворити такі вирази

$$u_c(\omega,0)=(u_c(\omega,h)+u_c(\omega,-h))\cdot(2\cdot\mathrm{ch}\omega h)^{-1},u_s(\omega,0)=(u_s(\omega,h)+u_s(\omega,-h))\cdot(2\cdot\mathrm{ch}\omega h)^{-1}, \qquad (А.2)$$

$$u_c(\omega,0)=(u_c(\omega,h)+u_c(\omega,-h))\cdot(2\cdot\mathrm{sh}\omega h)^{-1},u_s(\omega,0)=(u_s(\omega,h)+u_s(\omega,-h))\cdot(2\cdot\mathrm{sh}\omega h)^{-1}, \qquad (А.3)$$

при $\omega\ge 0$. Оскільки функція $u(x,0)$ однозначно відновлюється за своїми синус- і косинус-перетвореннями у вигляді

$$u(x,0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u_c(\omega,0)\cdot\cos\omega x d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u_s(\omega,0)\cdot\sin\omega x d\omega,$$

то на основі (А.2) отримаємо[50]

$$u(x,0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{u_c(\omega,h)+u_c(\omega,-h)}{2}\cdot\frac{\cos\omega x}{\mathrm{ch}\omega h}+\frac{u_s(\omega,h)+u_s(\omega,-h)}{2}\cdot\frac{\sin\omega x}{\mathrm{ch}\omega h}\right)d\omega=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\cos\omega x}{\mathrm{ch}\omega h}\cdot\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(\xi,h)+u(\xi,-h)}{2}\cdot\cos\omega\xi d\xi\right)+\frac{\sin\omega x}{\mathrm{ch}\omega h}\cdot\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(\xi,h)+u(\xi,-h)}{2}\cdot\sin\omega\xi d\xi\right)\right]d\omega=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(\xi,h)+u(\xi,-h)}{2}d\xi\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\omega x\cos\omega\xi+\sin\omega x\sin\omega\xi}{\mathrm{ch}\omega h}d\omega=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(\xi,h)+u(\xi,-h)}{2}d\xi\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\omega(\xi-x)}{\mathrm{ch}\omega h}d\omega=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(\xi,h)+u(\xi,-h)}{2}\cdot\frac{\pi}{2h}\cdot\left(\mathrm{ch}\frac{\pi(\xi-x)}{2h}\right)^{-1}d\xi.$$

Відтак, $u(x,0)=\frac{1}{2h}\int_{-\infty}^{\infty}S^{\varphi}(\xi,h)\cdot\left(\mathrm{ch}\frac{\pi(\xi-x)}{2h}\right)^{-1}d\xi$, де $S^{\varphi}(\xi,h)=\frac{u(\xi,h)+u(\xi,-h)}{2}$. (А.4)

---

[50] Парна складова розкладу розв`язку в ряд Фур`є.

[51] Проте кожну функцію на заданому проміжку можна подати у вигляді суми парної й непарної складових.

Введімо в розгляд “спряжену” функцію $v(x)$, пов’язану з $u(x)$ відношенням

$$v(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty (u_s(\omega,0)\cdot\cos\omega x-u_c(\omega,0)\cdot\sin\omega x)d\omega,$$

і зауважмо, що її *не можна* брати у вигляді[51]

$$v^*(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty (u_s(\omega,0)\cdot\cos\omega x-u_c(\omega,0)\cdot\sin\omega x)d\omega,$$

оскільки $v^*(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty\cos\omega x d\omega\int_{-\infty}^\infty u(\xi,0)\cdot\sin\omega\xi d\xi-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty\sin\omega x d\omega\int_{-\infty}^\infty u(\xi,0)\cdot\cos\omega\xi d\xi=$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty d\omega\int_{-\infty}^\infty u(\xi,0)\cdot\sin\omega(\xi-x)d\xi\equiv 0,$$

через те, що функція $\int_{-\infty}^\infty u(\xi,0)\cdot\sin\omega(\xi-x)d\xi$ за аргументом ω *суттєво непарна*! На основі рівностей (А.3) запишемо

$$v(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left[\frac{\cos\omega x}{\text{sh}\omega h}\cdot\frac{u_s(\omega,h)-u_s(\omega,-h)}{2}-\frac{\sin\omega x}{\text{sh}\omega h}\cdot\frac{u_c(\omega,h)-u_c(\omega,-h)}{2}\right]d\omega=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left\{\frac{\cos\omega x}{\text{sh}\omega h}\cdot\left(\int_{-\infty}^\infty\frac{u(\xi,h)-u(\xi,-h)}{2}\cdot\sin\omega\xi d\xi\right)-\frac{\sin\omega x}{\text{sh}\omega h}\cdot\left(\int_{-\infty}^\infty\frac{u(\xi,h)-u(\xi,-h)}{2}\cdot\cos\omega\xi d\xi\right)\right\}d\omega=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty S^\psi(\xi,h)d\xi\int_0^\infty\frac{\sin\omega\xi\cos\omega x-\cos\omega\xi\sin\omega x}{\text{sh}\omega h}d\omega=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty S^\psi(\xi,h)d\xi\int_0^\infty\frac{\sin\omega(\xi-x)}{\text{sh}\omega h}=$$

$$=\frac{1}{2h}\int_{-\infty}^\infty S^\psi(\xi,h)\cdot\text{th}\frac{\pi(\xi-x)}{2h}d\xi.$$

Таким чином, $v(x)=\frac{1}{2h}\int_{-\infty}^\infty S^\psi(\xi,h)\cdot\text{th}\frac{\pi(\xi-x)}{2h}d\xi$, $S^\psi(\xi,h)=\frac{u(\xi,h)-u(\xi,-h)}{2}$. (А.5)

***Зауваження* 2**. Введену функцію $v(x)$ можна подати як $v(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty u(\xi)d\xi\int_0^\infty\sin\omega(\xi-x)d\omega$.

Це очевидно з такого ланцюжка: $v(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty(u_s(\omega,0)\cdot\cos\omega x-u_c(\omega,0)\cdot\sin\omega x)d\omega=$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty\left[\cos\omega x\cdot\left(\int_{-\infty}^\infty u(\xi)\cdot\sin\omega\xi d\xi\right)-\sin\omega x\cdot\left(\int_{-\infty}^\infty u(\xi)\cdot\cos\omega\xi d\xi\right)\right]d\omega=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty u(\xi)d\xi\int_{-\infty}^\infty(\sin\omega\xi\cos\omega x-\cos\omega\xi\sin\omega x)d\omega=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty u(\xi)d\xi\int_0^\infty\sin\omega(\xi-x)d\omega.$$

2°. З рівностей (А.1), аналогічно до відношень (А.2-А.3) маємо при $\omega\ge 0$

$$w(\omega,0)=(w(\omega,h)+w(\omega,-h))\cdot(2\cdot\text{ch}\omega h)^{-1}, w(\omega,0)=(w(\omega,h)+w(\omega,-h))\cdot(2\cdot\text{sh}\omega h)^{-1}. \quad (А.6)$$

Оскільки функція $u(x,0)$ за певних умов[52] відновлюється за формулою

$$u(x,0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty w(\omega,0)\cdot e^{-i\omega x}d\omega,$$

---

[51] Проте кожну функцію на заданому проміжку можна подати у вигляді суми парної й непарної складових.

[52] Вона повинна бути абсолютно інтегровною на дійсній осі й парною [*Фихтенгольц Г.М.* Курс III, с. 445]

то з першого із виразів (А.6) отримуємо

$$u(x,0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{w(\omega,h)+w(\omega,-h)}{2}\cdot\frac{e^{-i\omega x}}{\mathrm{ch}\omega h}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega x}}{\mathrm{ch}\omega h}\cdot\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(\xi,h)+u(\xi,-h)}{2}\cdot e^{i\omega\xi}d\xi\right)d\omega=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(\xi,h)+u(\xi,-h)}{2}d\xi\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega x}}{\mathrm{ch}\omega h}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S^{\varphi}(\xi,h)d\xi\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\omega(\xi-x)+i\sin\omega(\xi-x)}{\mathrm{ch}\omega h}d\omega=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S^{\varphi}(\xi,h)d\xi\cdot 2\int_{0}^{\infty}\frac{\cos\omega(\xi-x)}{\mathrm{ch}\omega h}d\omega=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S^{\varphi}(\xi,h)d\xi\cdot\frac{\pi}{2h}\cdot\left(\mathrm{ch}\frac{\pi(\xi-x)}{2h}\right)^{-1}=$$

$$=\frac{1}{2h}\int_{-\infty}^{\infty}S^{\varphi}(\xi,h)\cdot\left(\mathrm{ch}\frac{\pi(\xi-x)}{2h}\right)^{-1}d\xi,\ \text{де}\ S^{\varphi}(\xi,h)=\frac{u(\xi,h)+u(\xi,-h)}{2}.$$

Отже, ми знову прийшли до формули (А.4), але коротшим шляхом.

***Зауваження* 3.** Зв'язок косинус- та синус-перетворень з перетворенням Фур'є загального вигляду встановлює комплексна функція $w(\omega,0)$, яка має вигляд

$$w(\omega,0)=\int_{-\infty}^{\infty}u(x,0)\cdot e^{i\omega x}dx=\int_{-\infty}^{\infty}u(x,0)\cdot\cos\omega x dx+i\cdot\int_{-\infty}^{\infty}u(x,0)\cdot\sin\omega x dx=u_c(\omega,0)+i\cdot u_s(\omega,0).$$

У той же час

$$u(x,0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}w(\omega,0)\cdot e^{-i\omega x}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[u_c(\omega,0)+i\cdot u_s(\omega,0)]\cdot e^{-i\omega x}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[u_c(\omega,0)+i\cdot u_s(\omega,0)]\times$$

$$\times(\cos\omega x-i\cdot\sin\omega x)d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[u_c(\omega,0)\cdot\cos\omega x+i\cdot u_c(\omega,0)\cdot\sin\omega x+i\cdot u_s(\omega,0)\cdot\cos\omega x+u_s(\omega,0)\cdot\sin\omega x]d\omega=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\cdot\left(\int_{-\infty}^{\infty}u(\xi,0)\cdot\cos\omega\xi\cos\omega x d\xi+\int_{-\infty}^{\infty}u(\xi,0)\cdot\sin\omega\xi\sin\omega x d\xi+\right.$$

$$\left.+i\cdot\int_{-\infty}^{\infty}u(\xi,0)\cdot\sin\omega\xi\cos\omega x d\xi-i\cdot\int_{-\infty}^{\infty}u(\xi,0)\cdot\cos\omega\xi\sin\omega x d\xi\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(\xi)d\xi\int_{-\infty}^{\infty}(\cos\omega(\xi-x)+i\sin\omega(\xi-x))d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(\xi)d\xi\int_{-\infty}^{\infty}\cos\omega(\xi-x)d\omega,$$

оскільки функція $\int_{-\infty}^{\infty}u(\xi)\cdot\sin\omega(\xi-x)d\xi$ від ω *непарна*. Поряд з цим існує спряжена функція

$$v^*(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\overline{w(\omega,0)\cdot e^{-i\omega x}}d\omega=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}(\cos\omega x+i\cdot\sin\omega x)d\omega\cdot\left(\int_{-\infty}^{\infty}u(\xi,0)\cdot\cos\omega\xi d\xi-i\cdot\int_{-\infty}^{\infty}u(\xi,0)\cdot\sin\omega\xi d\xi\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(\xi,0)d\xi\int_{0}^{\infty}(\cos\omega\xi\cos\omega x-i\cdot\sin\omega\xi\cos\omega x+i\cdot\cos\omega\xi\sin\omega x+\sin\omega\xi\sin\omega x)d\omega=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(\xi,0)d\xi\int_{-\infty}^{\infty}\cos\omega(\xi-x)d\omega-\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(\xi,0)d\xi\int_{0}^{\infty}\sin\omega(\xi-x)d\omega.$$

Вводячи в розгляд на основі цього зауваження "спряжену" з $u(x)$ функцію

$$v(x)=\mathrm{Re}\left(-\frac{1}{\pi i}\int_{0}^{\infty}\overline{w(\omega,0)\cdot e^{-i\omega x}}d\omega\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(\xi,0)d\xi\int_{0}^{\infty}\sin\omega(\xi-x)d\omega=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}(u_s(\omega,0)\cdot\cos\omega x-u_c(\omega,0)\cdot\sin\omega x)d\omega=-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{w(\omega,h)-w(\omega,-h)}{2}\cdot\frac{e^{i\omega x}}{\mathrm{sh}|\omega|h}d\omega=$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(\xi,h)-u(\xi,-h)}{2}d\xi\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-i\omega(\xi-x)}}{\mathrm{sh}|\omega h|}d\omega=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S^{\psi}(\xi,h)d\xi\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\omega(\xi-x)}{\mathrm{sh}\omega h}d\omega=\frac{1}{2h}\int_{-\infty}^{\infty}S^{\psi}(\xi,h)\times$$

$\times\,\mathrm{th}\dfrac{\pi(\xi-x)}{2h}d\xi$, знову отримуємо формулу (А.5).

Функції $u(x,h)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}\cdot f(\xi)d\xi$ й $v(x,h)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi-x}{h^2+(\xi-x)^2}\cdot f(\xi)d\xi$ називатимем *спряженими* в смислі виконання відношень Ейлера-Даламбера

$$\frac{\partial u(x,h)}{\partial x}=-\frac{\partial v(x,h)}{\partial h},\frac{\partial u(x,h)}{\partial h}=\frac{\partial v(x,h)}{\partial x}.$$

Зауваження 4. Для таких спряжених функцій справедливі відношення

$$u(\omega,-h)=f(\omega)\cdot e^{-\omega h},\omega\ge 0,\ \ v(\omega,-h)=-i\cdot f(\omega)\cdot e^{-i\omega h},$$

де $$v(\omega,-h)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega x}dx\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi-x}{h^2+(\xi-x)^2}\cdot f(\xi)d\xi=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)d\xi\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\upsilon}{h^2+\upsilon^2}\cdot e^{i\omega(\xi-x)}d\upsilon=$$

$$=-\frac{2i}{\pi}\cdot f(\omega)\cdot\frac{\pi}{2}\cdot e^{-\omega h}=-i\cdot f(\omega)\cdot e^{-\omega h},\omega\ge 0;$$

в граничному переході при $h\to 0$ маємо відношення $u(\omega,0)=f(\omega),v(\omega,0)=-f(\omega)$.

3°. В ході чисельної реалізації системи рівнянь

$$u(x,0)=\frac{1}{2h}\int_{-\infty}^{\infty}S^{\varphi}(\xi,h)\cdot\left(\mathrm{ch}\frac{\pi(\xi-x)}{2h}\right)^{-1}d\xi,\ \ v(x)=\frac{1}{2h}\int_{-\infty}^{\infty}S^{\psi}(\xi,h)\cdot\mathrm{th}\frac{\pi(\xi-x)}{2h}d\xi$$

слід врахувати, що поле $u(x)$ задано на скінченному відрізку $[-l,l]$, $l<\infty$, а гіперболічні функції $\mathrm{ch}\dfrac{\pi x}{2h}$ і $\mathrm{th}\dfrac{\pi x}{2h}$ можна обчислити лише на відрізку $[-a,a]$, де, як правило, $a\le l$. При цьому $a=2hb/\pi$; число b для певного ПК невелике (для і486 в межах $b=307$), тому можна визначити лише

$$\tilde{v}(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{l}(\tilde{u}_{\delta}(\omega,0)\cdot\cos\omega x-\tilde{u}_{c}(\omega,0)\cdot\sin\omega x)d\omega,$$

де $$\tilde{u}_{c}(\omega,0)=\int_{-l}^{l}u(x)\cdot\cos\omega x dx,\tilde{u}_{s}(\omega,0)=\int_{-l}^{l}u(x)\cdot\sin\omega x dx,$$

а подати $\tilde{v}(x)$ через функції $S^{\varphi}(\xi,h)$ і $S^{\psi}(\xi,h)$ можна лише у вигляді

$$u(x,0)=\frac{1}{2h}\int_{-a}^{a}S^{\varphi}(\xi,h)\cdot\left(\mathrm{ch}\frac{\pi(\xi-x)}{2h}\right)^{-1}d\xi,\ \ \tilde{v}(x)=\frac{1}{2h}\int_{-a}^{a}S^{\psi}(\xi,h)\cdot\mathrm{th}\frac{\pi(\xi-x)}{2h}d\xi.$$

4°. З отриманих раніше рівнянь (А.4-А.5) формуємо наступний алгоритм визначення контакту за полем, заданим на істотно обмежених профілях

$$\zeta(x,h)=S^{\varphi}(x,h)+S^{\psi}(x,h),\ S^{\varphi}(x,h)=\lim_{n\to\infty}S_n^{\varphi}(x,h),S^{\psi}(x,h)=\lim_{n\to\infty}S_n^{\psi}(x,h),\ n=\overline{0,\infty},$$

де $$S_{n+1}^{\varphi}(x,h)=u(x)-\frac{1}{2h}\int_{-\infty}^{\infty}S_n^{\varphi}(\xi,h)\cdot\left(\mathrm{ch}\frac{\pi(\xi-x)}{2h}\right)^{-1}d\xi+S_n^{\varphi}(x,h),\ S_0^{\varphi}(x,h)=u(x),$$

$$S_{n+1}^{\psi}(x,h)=v(x)-\frac{1}{2h}\int_{-\infty}^{\infty}S_n^{\psi}(\xi,h)\cdot\mathrm{th}\frac{\pi(\xi-x)}{2h}d\xi+S_n^{\psi}(x,h),\ S_0^{\psi}(x,h)=v(x),\qquad\text{(А.7)}$$

а функції $u(x)$ та $v(x)$ – "спряжені". Для отримання функції $v(x)$ розкладаємо "сіткову"

функцію $u(x)$, задану на інтервалі $x \in[-1,1]$, у ряд Фур'є

$$u(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \cos \pi kx+b_k \cdot \sin \pi kx, \qquad (A.8)$$

з коефіцієнтами $a_0=\int_{-1}^{1} u(x) dx$, $a_k=\int_{-1}^{1} u(x) \cdot \cos \pi kxdx$, $b_k=\int_{-1}^{1} u(x) \cdot \sin \pi kxdx$.

Якщо поле $u(x), x \in[-1,1]$ задано в дискретній мережі точок x_k, $k=\overline{1, M}$, розташованих посередині кожного елементарного відрізку таким чином, що

$$\Delta x=[-1,1]/M=2/M, x_k=-1+\Delta x/2+(k-1) \cdot \Delta x=2k-M-1/M,$$

то, поклавши $M=2m+1$, отримаєм $x_k=2(k-m-1)/2m+1$, де $i=k-m-1$ змінюється у межах $-m \leq i \leq m$, так що $x_k=2k/2m+1$, $-m \leq k \leq m$, а коефіцієнти мають такий вигляд:

$$a_0=\frac{2}{2m+1} \cdot \sum_{i=-m}^{m} u_i,\ a_k=\frac{2}{2m+1} \cdot\left\{u_0+\sum_{i=1}^{m}\left[u_i+u_{-i}\right] \cdot \cos \frac{2\pi ki}{2m+1}\right\},\ b_k=\frac{1}{2m+1} \cdot \sum_{i=1}^{m}\left[u_i-u_{-i}\right] \cdot \sin \frac{2\pi ki}{2m+1}.$$

Сума ряду (A.8) в дискретних точках $x_i=2i/2m+1$, по-суті, є матричною рівністю

$$\begin{bmatrix} u(x_1) \\ u(x_2) \\ u(x_3) \\ \vdots \\ u(x_{M-1}) \\ u(x_M) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & \cos \pi x_1 & \sin \pi x_1 & \cdots & \cos n\pi x_1 & \sin n\pi x_1 \\ 1 & \cos \pi x_2 & \sin \pi x_2 & \cdots & \cos n\pi x_2 & \sin n\pi x_2 \\ 1 & \cos \pi x_3 & \sin \pi x_3 & \cdots & \cos n\pi x_3 & \sin n\pi x_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos \pi x_{M-1} & \sin \pi x_{M-1} & \cdots & \cos n\pi x_{M-1} & \sin n\pi x_{M-1} \\ 1 & \cos \pi x_M & \sin \pi x_M & \cdots & \cos n\pi x_M & \sin n\pi x_M \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ b_1 \\ \vdots \\ a_n \\ b_n \end{bmatrix},$$

а коефіцієнти a_0, a_k й b_k, $k=\overline{1, n}$ у розгорнутім вигляді зображаються так

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ b_1 \\ \vdots \\ a_n \\ b_n \end{bmatrix}=\frac{2}{M} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \cos \pi x_1 & \cos \pi x_2 & \cos \pi x_3 & \cdots & \cos \pi x_{M-1} & \cos \pi x_M \\ \sin \pi x_1 & \sin \pi x_2 & \sin \pi x_3 & \cdots & \sin \pi x_{M-1} & \sin \pi x_M \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \cos n\pi x_1 & \cos n\pi x_2 & \cos n\pi x_3 & \cdots & \cos n\pi x_{M-1} & \cos n\pi x_M \\ \sin n\pi x_1 & \sin n\pi x_2 & \sin \pi x_3 & \cdots & \sin n\pi x_{M-1} & \sin n\pi x_M \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u(x_1) \\ u(x_2) \\ u(x_3) \\ \vdots \\ u(x_{M-1}) \\ u(x_M) \end{bmatrix}$$

Матриця косинусів розміром $(2n+1) \cdot(2m+1)$, $n \leq m$ останнього перетворення спряжена до вищенаведеної. Збудувати функцію $v(x)$ потрібно у тих же точках, у яких відома функція $u(x)$, а їх значно більше, ніж точок, в яких відшукують контакт, тобто $2m+1>2n+1$, тому варто будувати спряжену матрицю CS_{ij}^{*} розміром $(2n+1)(2m+1)$, що й реалізовано у підпрограмі CON(A,B).

Додаток Б

ЛІСТИНГИ ПАКЕТУ ПРОГРАМ ДЛЯ ВИРІШЕННЯ ЗАДАЧ ДИСЕРТАЦІЇ

Загальний інтерфейс програм розв'язку контактних задач:

```
c  інтерфейс таймера для виміру часу рахунку;
      interface to subroutine time(n,str)
      character*10 str[near,reference]
      integer*2 n [value]
      end
      interface to subroutine time(n,str)
      character*10 str[near,reference]
      integer*2 n [value]
      end
      implicit double precision (a-h,oz)
     character*10 ds,ts1,ts2,ts3,ts4,inp,out,ans*1,y*1
      double precision cs(70,30),cc(60),ct(60),g(500),
```

```
      z(90),Sc(90),sc1(90),St(90),st1(90),u(90),v(90),c(90)
      write(*,*)'-----------------------------------------------'
      write(*,*)'    Коротка назва програми     '
      write(*,*)'--------------------------------------'
      pause'Працюєм? Так - Enter, ні - Ctrl-C'
c  запит параметрів прямої задачі з файлу;
      nf=1
2     write(*,'(2x,''вихідні параметри збережено в фай
   *  лі ? {Y:N}'')')
      read(*,'(a1)',err=2) ans
      if(ans.eq.'y'.or.ans.eq.'Y') goto 3
      goto 4
3          write(*,'(2x,''ім'я файлу даних ПЗ ?'')')
           read(*,'(a10)',err=3) inp
           open(nf,file=inp,status='old')
           read(nf,*,err=3) dl,n,kd,fi,h1,k,a,b,ier
4     write(*,'(2x,''введіть ім'я файлу виводу ?'')')
      read(*,'(a10)',err=4) out
      open(nf,file=out,status='new')
      call date(10,ds)
      write(nf,'(1x,''програма  ###'',1x,''файл '',a10,
     * 20x,a11,a8)') out, 'дата счета  ',ds
c  ввід вручну параметрів схеми прямої задачі;
  call ivc in(nf,dl,n,kd,fi,h1,k,a,b,choice,delx,dely,am)
      call time(10,ts1)
      write(nf,*)'начало счета=',ts1
c  вирішення прямої задачі - контакту Іванова;
      if(am.gt.dl) write(*,*)'Інтегр. ядро за інтервалом'
      call ivc(dl,n,kd,fi,delx,dely,choice,h1,k,a,b,m,mg,
      z,g,amp)
      call ivc out(nf,amp,mg,g,m,z)
      call time(10,ts3)
      write(nf,*)'стоп счета=',ts3
      pause'Пряму задачу вирішено! Продовжим ? т/н'
 c  ввід параметрів для розв'язку зворотньої задачі
      call inver in(nf,h,eps,delg)
      call time(10,ts3)
      write(nf,*)'старт счета=',ts3
c  розрахунок контакту за алгоритмом ( .);
      call ####(nf,m,n,kd,delx,h,g,Sc,St,z,delg,dv,iter)
      call time(10,ts4)
      write(nf,*)'конец счета=',ts4
c   організація примітивного диспетчера завдань;
      goto 6
5     pause'Зворотню задачу вирішено! Продовжити ?'
      nf=nf+1
      goto 4
6     close(nf)
      goto 5
      stop'Результати - в файлі #.res !'
      end
```

Підпрограма вводу-виводу даних прямої задачі для контакту:

```
  subroutine ivc in (nf,dl,kb,ka,cc,ee,kc,a,b,ch,dx,dy,s)
      implicit double precision (a-h,oz)
      character*26 str
      data pi/3.141592653589793d0/
      write(nf,'(18x,''--Параметри моделі ПЗ--'')')
10     write(*,'(3x,''абс. довжина профілю ?'')')
       read(*,*,err=10) dl
      write(nf,'(3x,''абс. довжина профілю='',f5.2)') dl
20   write(*,'(3x,''кількість точок вимірів n й коеф-т
   *  дискретизації поля kd ?'')')
       read(*,*,err=20) kb,ka
       write(nf,'(3x,''кількість точок n='',i3,''; коеф-т
       *   дискретизації kd='',i3)') ka,kb
30     write(*,'(3x,''коеф. відношення довжина ?'')')
       read(*,*,err=30) cc
       write(nf,'(3x,''коеф. довжин='',f7.2)') cc
35     write(*,'(3x,''опорна апріорна глибина ?'')')
       read(*,*,err=35) ee
      write(nf,'(3x,''апріорна глибина='',1pd9.2)') ee
40     write(*,'(3x,''кратність синусоїди ?'')')
       read(*,*,err=40) kc
       write(nf,'(3x,''кратність синусоїди=є ,i3)') kc
45     write(*,'(3x,''амплітуда й зміщення конт.?'')')
       read(*,*,err=45) a,b
       write(nf,'(3x,''амплітуда a='',f7.3,''; зміщення
     *  b='',f7.3)') a,b
c перевірка парності розбиття вузлів;
      od=cc*0.5d0
       ch=od-int(od)
          if(ch.le.0.d0) then
           str='тобто парна кількість вузлів'
          else
           str='тобто непарна кількість вузлів'
          endif
      write(nf,'(3x,''ознака парн . ='',f5.3,a26)') ch,str
c  крок по профілю - довжина інтервалу розбиття
      dx=dl/kb
c  крок обчислення значень поля при деталізації;
      dy=dx/ka
      write(nf,'(3x,''крок x='',1pd10.3, '' '')') dx,dl,dl
      write(nf,'(3x,''крок  y='',1pd10.3)') dy
      s=2.0d0*ee*dl/pi
      write(nf,'(3x,''інтер-л обліку ядра='',f5.3)') s,s
    write(nf,'(/3x,''Підсумок вирішення прямої задачі
 *- визначення поля від контакту на зразок Іванова
  *    '')')
      return
      end
```

Підпрограма виводу результатів прямої задачі:

```
      subroutine ivc out (nf,dm,mg,field,m,cont)
      implicit double precision (a-h,oz)
      double precision field(400),cont(70)
      write(nf,'(3x,''макс. +-ва амплітуда поля='',
      1pd14.6)') dm
     write(nf,'(3x,''відновлене поле на''i3,'' точках'')') mg
    write(nf,'(1x,1p5d14.6)') (field(i), i=1,mg)
    write(nf,'(3x,''відновл-й контакт на'',i3,'' точках'')') m
      write(nf,'(1x,1p5d14.6)') (cont(i), i=1,m)
      return
```

```
end
```

Підпрограма чисельного розв'язку прямої задачі (4.21):

$$\zeta(x_i)=\begin{cases} h_1+\sum_{i=1}^{m,\Delta x}\left\{a\cdot\left(1-x_i^2\right)^2+b\sin k\pi x_i\right\}, & i_p<i\le i_n \\ h_1,\ m=2n+1, & i_n<i\le i_p \end{cases},$$

$$u(\xi_j)=\sum_{j=1}^{mg}\left\{2\pi\zeta(\xi_j)-\Delta x\sum_{i=1}^{m}\gamma_i\ \ln\frac{(\xi_j-x_i)^2+\zeta^2(\xi_j)}{(\xi_j-x_i)^2+\zeta^2(x_i)}\right\},\quad mg=k_d\cdot(m-1)+1$$

```
      subroutine ivc(dl,nfield,kdis,fint,dx,dy,ch,ee,k,
   *  a,b,m,mg,z,c,dm)
      implicit double precision (a-h,oz)
      double precision c(400),z(70),z1(400)
      data pi/3.141592653589793d0/
c формування плоскої рівномірної сітки для поля
           if(ch.le.o.d0) then
           m=int((fint)*nfield+1
c кількість точок на півінтервалі [-2,-1);
           jp=(kdis*(m-nfield-1)+1)/2
c кількість точок на півінтервалі [-2,+1);
           jm=(kdis*(m+nfield)+1)/2
c кількість точок на деталіз-му профілі [-2,2];
           mg=kdis*(m-1)+1
c початкові точки значень поля - крайні ліві;
           sy=-fint
           sx=-fint
           goto 3
           else
           m=int(fint)*nfield
           jp=kdis*(m-nfield)/2
           jm=kdis*(m+nfield)/2
           mg=kdis*m
           sy=-fint+dy*0.5d0
           sx=-fint+dy*0.5d0
           endif
c початкова кількість точок на недеталіз. прфілі;
3     ip=(m-nfield)/2
      in=ip+nfield
c при обчисленні на [-1,1] початкова точка;
      x=-1.0d0+dx*0.5d0
c обчислення теоретичного контакту...
           do 5 i=1,m
             if((i.dt.ip).and.(i.le.in)) then
              rx=k*pi*x
              z(i)=ee+a*(1.0d0-x*x)**2+b*dsin(rx)
              x=x+dx
             else
              z(i)=ee
             endif
5          continue
        xi=-1.0d0+dy*0.5d0
           do 9 j=1,mg
           Sln=0.0d0
             if((j.gt.jp).and.(j.le.jm)) then
              rx=k*pi*xi
              z1(j)=ee+a*(1.0d0-*xi*xi)**2+b*dsin(rx)
              xi=xi+dy
             else
              z1(j)=ee
             endif
c ...й теор. поля за формулою В.К. Іванова [45];
              do 8 i=1,m
              rx=(sy-sx)**2
              ry=z1(j)**2+rx
              rz=z(i)**2+rx
              rx=ry/rz
              Sln=Sln+dlog(rx)
8              sx=sx+dx
           c(j)=2*pi*z1(j)-dx*Sln
9          sy=sy+dy
c обчислення максим-ї додатньої амплітуди поля;
         dm=0.0d0
           do 10 i=1,mg,kdis
           delg=c(i)-c(1)
             if(dabs(delg)-dm.ge.0.d0) then
              dm=dabs(delg)
             else
              goto 10
             endif
10         continue
        return
        end
```

1°. *Алгоритм* (3.6) *розв'язку* контактної задачі:

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x;h)=S(x;h)=\frac{\zeta(x;h)+\zeta(x;-h)}{2},\quad \zeta(x;h)=2S(x;h)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}\cdot u(\xi)d\xi$$

$$S_{n+1}(x;h)=u(x)-\frac{1}{2h}\int_{-\infty}^{\infty}S_n(\xi;h)\cdot\left(\mathrm{ch}\frac{\pi(\xi-x)}{2h}\right)^{-1}d\xi+S_n(x;h),\quad S_0(x;h)=u(x),\ n=0,\infty$$

```
        subrouitne astra(nf,m,n,kdis,ee,dx,g,dg,z,dv,iter)
      implicit double precision (a-h,o-z)
      double precision v(70),z(70),S(70),g(500),Cp(70),
     Cs(60)
      data pi /3.141592653589793d0/
```

```
      n0=(m-n)/2
      m0=m-n0
c розрахунок правої частини системи рівнянь
      do 1 i=1,m
      middle=kdis*(i-1)+1
      v(i)=g(middle)/(2*pi)
      S(i)=v(i)
1     z(i)=S(i)
c звуження обл. визначення конт-ту заданням h
      do 2 i=1,n0
      l=m-i+1
      S(i)=ee
z(i)=ee
      S(l)=ee
2     z(l)=ee
      write(nf,'(10x,''первісне значення контакту на
      ",i3," точках")') m
write(nf,'(1x,1p5d14.6)')  (z(i), i=1,m)
      write(nf,'(18x,"----знайдений контакт----")')
c облік інт. ядер Пуассона й Шварца в вузлах
Cp(1)=dx/(pi*ee)
Cs(1)=dx*0.5d0/ee
do 3 i=1,n0
      middle=i+1
      r=dx*i
      r1=pi*(ee**2+r**2)
      Cp(middle)=(dx*ee)/r1
r=(pi*r)/(2*ee)
      r1=dexp(r)
      r2=dexp(-r)
3     Cs(middle)=dx/(ee*(r1+r2))
c облік і-ї компоненти фіктивного конт-ту; 1-й кр
      middle=n0+1
      iter=0
4     dv=0.0d0
      iter=iter+1
      do 6 i=middle,m0
      stra=0.0d0
      do 5 j=1,n0
      jl=i+j-is
      jr=i-j+is
      js=is-j+1
5     stra=stra+Cs(js)*(S(jl)+S(jr))
stra=v(i)-stra-Cs(1)*S(i)
      dv=dv+stra**2
6     z(i)=stra+s(i)
c серед.-квадрат. похибка поправки до конт-ту;
dv=dsqrt(dv/(m0-middle))
      do 7 i=1,m
7     S(i)=z(i)
c критерій зупинки рахунку - |S(i)|<похибки поля
      if(dg-dv) 4,8,8
c облік шуканого і-го конт-ту за (1.20); 2-й крок
8     do 11 i=middle,m0
      puas=0.0d0
      do 9 j=1,n0
      jl=i=j-is
      jr=i-j+is
      js=is-j+1
9     puas=puas+Cp(js)*(v(jl)-v(jr))
      puas=puas+Cp(1)*v(i)
11    z(i)=2*S(i)-puas
      write(nf,'(1x,1p5d14.6)')  (z(i), i=1,m)
      write(nf,'(5x,''stop-критерійя:  кількість  ітерацій  ='
      ',i5)') iter
      write(nf,'(5x,"сер.-квадр. пох=",1pd12.4)') dv
      return
      end
```

2°. Модифікований алгоритм (1.39) для контакту, залежний від *h*:

$$u(x;h)=u(x)-h, v(x;h)=u(x;h)-\frac{1}{h}\int_{-\infty}^{\infty}u(x+w;h)\cdot K(w;h)dw$$

$$K(w;h)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\mathrm{ch}\frac{\pi\upsilon}{2h}\right)^{-1}\cdot\left[\frac{1}{h^2+(w+\upsilon)^2}+\frac{1}{h^2+(w-\upsilon)^2}\right]d\upsilon,\ \zeta_0(x;h)=v(x;h),\quad n=\overline{0,\infty}$$

$$\zeta(x;h)=\lim_{n\to\infty}\zeta_n(x;h),\quad \zeta_{n+1}(x;h)=v(x;h)-\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\zeta_n(\xi;h)\cdot\left(\mathrm{ch}\frac{\pi(\xi-x)}{2h}\right)^{-1}d\xi+\zeta_n(x;h)$$

```
      subroutine astma(nf,m,n,kdis,ee,dx,dy,g,dg,
     z,dv,vn,ep,iter)
      implicit double precision (a-h,o-z)
      double precision c(60),g(500),z(90),v(90),z1(90)
      data pi/3.141592653589793d0/
      n0=(m-n)/2
      m0=m-n0
      nfin=n0+1
c розрахунок правої частини U(x); 1-й крок
      do 1 i=1,m
      middle=kdis*(i-1)+1
1     v(i)=g(middle)*0.5d0/pi
c звуження компакту заданням апріор-ї глибини;
      do 2 i=1,n0
      middle=m-i+1
      z(i)=ee
      z1(i)=ee
      z(middle)=ee
      z1(middle)=ee
c облік модиф. інтегралу Чорного K(x,h);
      do 4 i=1,nfin
      Cs=0.0d0
      middle=i-1
      do 3 j=1,300
      xi=(j-0.5d0)*dy
      r=(pi*xi*0.5d0)/ee
```

```
          r1=dexp(r)
          r2=dexp(-r)
          r=1.0d0/(r1+r2)
          r1=1.0d0/(ee**2+(middle*dx-xi)**2)
          r2=1.0d0/(ee**2+(middle*dx+xi)**2)
3         Cs=Cs+r*(r1+r2)
4         c(i)=(dy*0.5d0/pi)*Cs
c облік первісного значення контакту; 2-й крок
          do 6 i=nfin,m0
          puas=0.0d0
            do 5 j=1,n0
            jl=i+j-nfin
            jr=i-j+nfin
            js=nfin-j+1
5           puas=puas+c(js)*(v(jl)+v(jr))
          puas=puas+c(1)*u(i)
6        z(i)=v(i)-dx*puas
          do 7 i=1,m
7        v(i)=z(i)
      write(nf,'(3x,"   ",i3,"   ")') m
      write(nf,'(1x,1p5d14.6) (z(i), i=1,m)
      write(nf,'(3x,'-знайдене значення контакту−")')
c розрахунок ядра інтегралу на зразок Страхова;
      c(1)=dx/(4*ee)
          do 8 i=1,n0
          middle=i+1
          r=(dx*i*pi)/(2*ee)
          r1=dexp(r)
          r2=dexp(-r)
8         c(middle)=dx/(2*ee*(r1+r2))
c розрахунок n-го значення поправки; 3-й крок
      iter=0
9     dv=0.0d0
      iter=iter+1
          do 12 i=nfin,m0
          puas=0.0d0
             do 11 j=1,n0
             jl=i+j-nfin
             jr=i-j+nfin
             js=nfin-j+1
11           puas=puas+c(js)*(z(jl)+z(jr))
’         puas=v(i)-puas-c(1)*z(i)
          dv=dv+puas**2
12       z1(i)=puas+z(i)
c середньоквадр-на похибка i-ї поправки
      dv=dsqrt(dv/(m0-nfin))
          do 14 i=1,m
14       z(i)=z1(i)
c критерій зупинки - нев’язка < похибки поля;
          if(dg-dv) 9,9,16
16     write(nf,'(1x,1p5d14.6)') (z(i), i=1,m)
       write(nf,'(5x,"stop-критерій: ітер.=",i5)') iter
       write(nf,'(9x,"сер.-квадр. пох.=",1pd12.4) dv
      return
      end
```

2′. Модифікований алгоритм (3.5) для контакту, незалежний від *h*:

$$\zeta_{n+1}(x)=w_n(x)-\frac{1}{4\zeta_n(x)}\int_{-\infty}^{\infty}\zeta_n(\xi)\cdot\left(\operatorname{ch}\frac{\pi(\xi-x)}{2\zeta_n(x)}\right)^{-1}d\xi+\zeta_n(x),n=\overline{0,\infty}$$

$$K_n(x;\zeta)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\operatorname{ch}\frac{\pi\xi}{2\zeta_n(x)}\right)^{-1}\cdot\left[\frac{1}{\zeta_n^2(x)+(\xi+\upsilon)^2}-\frac{1}{\zeta_n^2(x)+(\xi-\upsilon)^2}\right]d\xi,$$

$$w_n(x)=u(x)-\int_{-\infty}^{\infty}u(\zeta,\upsilon)\cdot K_n(\upsilon;x)d\upsilon,\quad \zeta_0(x)=\zeta^{(k)}(x;h),\zeta^{(0)}(x;h)=u(x),k=\overline{0,3}$$

```
     subroutine astmb(nf,m,n,kdis,ee,dx,g,dg,z,dv,iter)
      implicit double precision (a-h,o-z)
      double precision u(70),g(500),z(70),v(70),z1(70),
      cp(70),ch(70)
      data pi/3.141592653589793d0/
      n0=(m-n)/2
      m0=m-n0
      nfin=n0+1
c розрахунок правої частини U(x); 1-й крок
          do 1 i=1,m
          middle=kdis*(i-1)+1
          u(i)=g(middle)*0.5d0/pi
1         z(i)=u(i)
c звуження компакту заданням апріор-ї глибини;
          do 2 i=1,n0
          middle=m-i+1
          v(i)=ee
          z(i)=ee
          z1(i)=ee
          v(middle)=ee
          z(middle)=ee
2         z1(middle)=ee
      write(nf,'(2x,"     ",i3," точках")') m
      write(nf,'(1x,1p5d14.6) (z(i), i=1,m)
      write(nf,("---знайдений контакт----")')
      iter=0
3     dv=0.0d0
      iter=iter+1
      dy=110.0d0/300
          do 7 k=nfin,m0
          puas=0.0d0
          swa=0.0d0
c облік модиф. інтегралу Чорного K(x,h);
          do 5 i=1,nfin
          Cs=0.0d0
          middle=i-1
            do 4 j=1,300
            xi=(j-0.5d0)*dy
            r=(pi*xi*0.5d0)/z(k)
            r1=dexp(r)
```

```
         r2=dexp(-r)
         r=1.0d0/(r1+r2)
         r1=1.0d0/(z(k)**2+(middle*dx-xi)**2)
         r2=1.0d0/(z(k)**2+(middle*dx+xi)**2)
3        Cs=Cs+r*(r1+r2)
         cp(i)=(dy*0.5d0/pi)*Cs
         r=(dx*middle*pi*0.5d0)/z(k)
         r1=dexp(r)
         r2=dexp(-r)
5        ch(i)=dx*0.5d0/(z(k)*(r1+r2))
c облік первісного значення контакту; 2-й крок
         do 6 j=1,n0
         jl=i+j-nfin
         jr=i-j+nfin
         js=nfin-j+1
         puas=puas+cp(js)*(u(jl)+u(jr))
6        swa=swa+ch(js)*(z(jl)+z(jr))
         puas=puas+cp(1)*u(k)
         v(k)=u(k)-dx*puas
         swa=v(k)-swa-ch(1)*z(k)
         dv=dv+swa**2
7        z1(k)=swa+z(k)x
c середньоквадр-на похибка і-ї поправки
      dv=dsqrt(dv/(m0-nfin))
         do 8 i=1,m
8        z(i)=z1(i)
c критерій зупинки - нев'язка < похибки поля;
         if(dg-dv) 3,3,9
9     write(nf,'(1x,1p5d14.6)') (z(i), i=1,m)
      write(nf,'(5x,''stop-критерій: ітер . =",i5)') iter
      write(nf,'(9x,''сер.-квадр. пох . =",1pd12.4) dv
      return
      end
```

3°. Алгоритм Нумерова-Маловичка (2.21):

$$\Delta\zeta_n^{(m+1)}(x)=v_n(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}\cdot\Delta\zeta_n^{(m)}(\xi)d\xi+\Delta\zeta_n^{(m)}(x),\Delta\zeta_n^{(0)}(x)=v_n(x),m,n=\overline{0,\infty}$$

$$v_n(x)=U(x)-\zeta_n(x)+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{(\xi-x)^2+\zeta_n^2(x)}{(\xi-x)^2+\zeta_n^2(\xi)}d\xi,\zeta_{n+1}(x)=\zeta_n(x)+\Delta\zeta_n(x),$$

$$\Delta\zeta_n(x)=\lim_{m\to\infty}\Delta\zeta_n^{(m)}(x),\zeta_0(x)=U(x)$$

Алгоритм реалізують у *майже діагональному* вигляді, коли m змінюється певним чином (5-20), або в *діагональному,* коли $m=0$, а змінюється лише n до виконання умови $\|v_n(x)\|\le\varepsilon$.

```
    subroutine numal(nf,m,n,kdis,ee,dx,fin,g,dg,
      cho,z,dv,md,iter)
      implicit double precision (a-h,o-z)
      double precision dz(70), dz1(10),u(70),v(70),
      z(70),c(70),g(500)
      data pi/3.141592653589793d0/
      n0=(m-n)/2
      m0=m-n0
c  розрахунок правої частини U(x); 1-й крок
         do 1 i=1,m
         middle=kdis*(i-1)+1
         u(i)=g(middle)*0.5d0/pi
1        z(i)=u(i)
c  звуження обл. визначення заданням апріор-ї h
         do 2 i=1,n0
         middle=m-i+1
         v(i)=0.0d0
         z(i)=ee
         v(middle)=0.0d0
2        z(middle)=ee
      write(nf,'(9x,'' і модель на'',i3,'' точках'')') m
      write(nf,'(1x,1p5d14.6)') (z(i), i=1,m)
      write(nf,'(10x,''---значення контакту----'')')
c  облік підінтегрального ядра Пуассона;
      middle=n0+1
      jf=2*n0+1
      sx=-1.0d0+dx*0.5d0
         do 3 i=1,n0
         k=jf-i+1
         r=(dx*ee)/(pi*(ee**2+sx**2))
         c(i)=r
3        c(k)=r
      c(middle)=dx/(pi*ee)
c  вибір поч. відліку залежно від парності вузлів
      iter=0
4     dv=0.0d0
      iter=iter+1
         if (cho.le.0d0)  then
         sx=-fin
         goto 7
         else
         s=-fin+dx*0.5d0
      endif
7     sy=-1.0d0+dx*0.5d0
c  облік поч-ї поправки до розв'язку; 2-й крок
         do 9 i=middle,m0
         Sln=0.0d0
            do 8 j=1,jf
            js=i+j-middle
            r=(sx-sy)**2
            r1=z(i)**2+r
            r2=z(js)**2+r
            r=r1/r2
            sy=sy+dlog(r)
8           sx=sx+dx
         v(i)=u(i)-z(i)+(dx*0.5d0/pi)*Sln
         dv=dv+v(i)**2
         sy=sy+dx
9        sx=sx+dx
c  розрахунок сер.-квадр-ї похибки розв'язку;
```

```
      dv=dsqrt(dv/(m0-middle))
      do 11 i=1,m
11    dz(i)=v(i)
c  облік і-ї поправки до розв'язку; 3-й крок
      do 15 k=1,md
        do 13 i=is,m0
         puas=0.0d0
           do 12 j=1,jf
            js=i+j-is
12          puas=puas+c(j)*dz(js)
13        dz1(i)=v(i)-puas+dz(i)
          do 14 i=middle,m0
14    dz(i)=dz1(i)
15    continue
c  остаточннй виправлений розв'язок; 4-й крок
      do 16 i=is,m0
16    z(i)=z(i)+dz(i)
c  перевірка критерію зупинки ітерацій;
      if(dg-dv) 4,4,20
20    write(nf,'(1x,1p5d14.6)') (z(i),i=1,m)
      write(nf,'(5x,''stop-критерій: ітер.='',i5)') iter
      write(nf,'(9x,''сер.-квадр. пох . ='',1pd12.4)') dv
return
end
```

3′. Обчислення значень ядра для алгоритму 2° при $h = 1.0$:

$$K(x;h) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\mathrm{ch}\frac{\pi\xi}{2h}\right)^{-1}\cdot\frac{d\xi}{h^2+(\xi-x)^2} = \frac{1}{4\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\mathrm{ch}\frac{\pi\xi}{2h}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{1}{h^2+(\xi-x)^2}+\frac{1}{h^2+(\xi+x)^2}\right)d\xi$$

```
subroutine compound(nf,ma,ist,num,ee,dx,c)
implicit double precision (a-h,o-z)
double precision c(100)
data pi/3.141592653589793d0/
    do 3 m=100,ma,ist
    dy=110.0d0/m
      do 2 i=1,num
      chp=0.0d0
      middle=i-1
        do 1 j=1,m
        xi=(j-0.5d0)*dy
        r=(pi*xi)*0.5d0/ee
        r1=dexp(r)
        r2=dexp(-r)
        r=1.0d0/(r1+r2)
        r1=1.0d0/(1.0d0+(middle*dx-xi)**2)
        r2=1.0d0/(1.0d0+(middle*dx+xi)**2)
1       chp=chp+r*(r1+r2)
2       c(i)=(dy*0.5d0/pi)*chp
    write(nf,'(1x,1pd14.6)') (c(i), i=1,num)
    return
    end
```

4°. *Узагальнений алгоритм* (3.4) визначення контакту на *короткому профілі*:

$$\zeta(x) = S^{\varphi}(x) + S^{\psi}(x), S^{(n)}(x) = \lim_{n\to\infty} S_n^{(n)}(x), n = \varphi,\psi$$

$$S_{n+1}^{\varphi}(x) = u(x) - \frac{1}{2\zeta_n(x)}\int_{-\infty}^{\infty} S_n^{\varphi}(\xi)\cdot\left(\mathrm{ch}\frac{\pi(\xi-x)}{2\zeta_n(x)}\right)^{-1}d\xi + S_n^{\varphi}(x), n = \overline{0,\infty}$$

$$S_{n+1}^{\psi}(x) = u(x) - \frac{1}{2\zeta_n(x)}\int_{-\infty}^{\infty} S_n^{\psi}(\xi)\cdot\mathrm{th}\frac{\pi(\xi-x)}{2\zeta_n(x)}d\xi + S_n^{\psi}(x), S_0^{\varphi}(x) = S_0^{\psi}(x) = \zeta_0(x) = u(x)$$

```
 subroutine short2(nf,ier,n,m,kdis,dx,ee,g,Sc,St,
 z,dg,dv,iter)
 implicit double precision (a-h,o-z)
 double precision ch(60),cs(70,30),th(60),u(90)
 g(500),z(90), Sc(90),sc1(90),St(90),st1(90),v(90)
 data pi/3.141592653589793d0/
c запит на визначення V(x) і границі інтегрув-ня
     if(ier) 12,11,10
10   n0=(n-1)/2
     m0=(m-1)/2
c облік правої частини системи U(x); фон врах.
      do 1 i=1,m
      middle=kdis*(i-1)+1
      u(i)=g(middle*0.5d0/pi
1     Sc(i)=u(i)
c визначення 'спряженої' ф-ції V(x) розкладом;
c облік тригонометричної матриці Фур'є-перетвор
     call con (cs,m0,n0,pi)
c визначення коеф-тів ряду - Фур'є-аналіз;
     call anal (th,cs, u, dx, m0, n0)
c Фур'є-синтез спряженої' функції V(x);
     call synv (v,cs,th,m0,n0)
       do 2 i=1,m
2      St(i)=v(i)
     write(nf,є(10x,"початкове значення ф-ції Sf на     ",i3,"
точках")') m
     write(nf,'(1x,1p5d14.6)') (Sc(i), i=1,m)
     write(nf,'(10x,"початкове значення ф-ції Sh на
          ",i3," точках")') m
     write(nf,'(1x,1p5d14.6) (St(i), i=1,m)
     write(nf,'(10x,"---значення контакту----")')
c визначення контакту за алг-мом Страхова 2.30
11   n0=(m-n)/2
     nfin=n0+1
     m0=m-n0
c звуження обл. визначення заданням апріорної h
       do 3 i=1,n0
       middle=m-i+1
```

```
            Sc(i)=ee
            sc1(i)=ee
            St(i)=ee
            st1(i)=ee
            z(i)=ee

            Sc(middle)=ee
            sc1(middle)=ee
            St(middle)=ee
            st1(middle)=ee
3         z(middle)=ee
        iter=0
4       dv=0.0d0
        iter=iter+1
            do 7 k=nfin,m0
            Sch=0.0d0
            Sth=0.0d0
c визначення ch- і th-ядер інтегралів Шварца;
              do 5 i=1,nfin
              middle=i-1
              r=(dx*middle*pi*0.5d0)/z(k)
              r1=dexp(r)
              r2=dexp(-r)
              ch(i)=dx/(z(k)*(r1+r2))
5           th(i)=dx*(r1-r2)*0.5d0/(z(k)*(r1+r2))

                    do 6 j=1,n0
                    jl=k+j-nfin
                    jr=k-j+nfin
                    js=nfin-j+1
                    Sch=Sch+ch(js)*(Sc(jl)+Sc(jr))
6                   Sth=Sth+th(js)*(St(jr)-St(jl))
              Sch=u(k)-Sch-ch(1)*Sc(k)
              Sth=v(k)-Sth
              dv=dv+Sch**2
              sc1(k)=Sch+Sc(k)
7           st1(k)=Sth+St(k)
c серед-квадр. похибка й остаточний розв'язок;
        dv=dsqrt(dv/(m0-nfin))
            do 8 i=nf,m0
            Sc(i)=sc1(i)
            St(i)=st1(i)
8         z(i)=Sc(i)+St(i)
c критерій зупинки рахунку - dz<dU;
            if(iter.ge.1000) goto 10
            if(dg-dv) 4,9,9
10          ier=0
9       write(nf,'(1x,1p5d14.6)') (z(i), i=1,m)
        write(nf,'(3x,''stop-критерій: кількість ітер-й
            =",i5)') iter
        write(nf,'(15x,''сер.-квадр. пох . =",1pd12.4)') dv
12      write(nf,'(3x,''Помилка управління !")')
            return
        end
```

5°. Підпрограма обчислення тригонометричної матриці Фур'є *CS*:

```
          subroutine con(a,mcol,nrow,pi)
        implicit double precision (a-h,o-z)
        double precision a(70,1)
c ініціаліз-я 'реперного' стовпця початку відліку;
        i=mcol+1
        mfinal=2*mcol+1
        a(i,1)=1.0d0
            do 1 k=1,nrow
            j=2*k
            a(i,j)=1.0d0
            j=j+1
1         a(i,j)=0.0d0
        middle=i
c визначення 1-х 3 строк матриці в вузлах i;
            do 2 i=1,mcol
            il=middle-i
            ir=middle+i
            a(ir,1)=1.0d0
            x=(2*pi*i)/mfinal
            a(ir,2)=dcos(x)
            a(ir,3)=dsin(x)
            a(il,1)=a(ir,1)
            a(il,2)=a(ir,2)
2         a(il,3)=-a(ir,3)
c визначення індексу поточної строки й контроль
            do 5 k=2,nrow
            l=0
            do 5 i=1,mcol
            il=middle-i
            ir=middle+i
3         kl=k*i-l*mfinal
            if (abs(kl) - m)  then
           l=l+1
             goto 3
            else
           j=2*k+1
            endif
c заповнення парних строк матриці;
            if(kl.le.0) then
           imk=middle-kl
             a(ir,j)=-a(imk,3)
             a(il,j)=a(imk,3)
             goto 4
            else
           imk=middle+kl
             a(il,j)=-a(imk,3)
             a(ir,j)=a(imk,3)
            endif
4           j=j-1
c заповнення непарних строк матриці;
            a(ia,j)=a(imk,2)
5         a(id,j)=a(imk,2)
        return
        end
```

6°. Підпрограма визначення вектора коефіцієнтів розкладу в ряд Фур'є:

$$a_0=\frac{2}{2m+1}\cdot\sum_{i=-m}^{m}u_i\,,\qquad a_k=\frac{2}{2m+1}\cdot\left\{u_0+\sum_{i=1}^{m}\left[u_i+u_{-i}\right]\cdot\cos\frac{2\pi ik}{2m+1}\right\},$$

$$b_k=\frac{1}{2m+1}\cdot\sum_{i=1}^{m}\left[u_i-u_{-i}\right]\cdot\sin\frac{2\pi ik}{2m+1}$$

```
   subroutine anal (a,b,field,dx,m,n)
   implicit double precision (a-h,o-z)
   double precision a(1),b(70,1),field(1)
   mfinal=2*m+1
   middle=m+1
c обчислення початкового коефіцієнту a(0) ряду;
   Sodd=0.0d0
      do 1 i=1,mfinal
1     Sodd=Sodd+field(i)
   a(1)=dx*Sodd
      do 3 k=1,n
      Sodd=0.0d0
      Seven=0.0d0
c визначення парних й непарних коеф-тів ряду;
         do 2 i=1,m
         il=middle-i
         ir=middle+i
         j=2*k
         Sodd=Sodd+b(i,j)*(field(il)+field(ir))
         j=j+1
2        Seven=Seven+b(i,j)*(field(ir)-field(il))
        j=2*k
        a(j)=dx*(c(middle)+Sodd)
        j=j+1
3       a(j)=dx*Seven
      return
      end
```

7°. Підпрограма синтезу Фур'є "спряженої" функції *v(x)*:

$$v^*(x_i)=\sum_{i=1}^{2m+1}\sum_{j=1}^{2n+1}cs_{ij}\cdot u_j$$

```
   subroutine synu (a,b,field,m,n)
   implicit double precision (a-h,oz)
   double precision a(1),b(70,1),field(1)
   mfinal=2*m+1
   nfinal=2*n+1
   field(1)=field(1)*0.5d0
      do 2 i=1,mfinal
        prod=0.0d0
          do 3 j=1,nfinal
3         prod=prod+b(i,j)*field(j)
2       a(i)=prod
      return
      end
```

8°. Підпрограма синтезу Фур'є "спряженої" функції *v*(x)*:

```
   subroutine synv (a,b,field,m,n)
   implicit double precision (a-h,oz)
   double precision a(1),b(70,1),field(1),cv(30)
   mfinal=2*m+1
   nfinal=2*n+1
   cv(1)=0.0d0
      do 1 k=1,n
      i=2*k
      j=i+1
      cv(i)=field(j)
1     cv(j)=-field(i)
        do 3 i=1,mfinal
        prod=0.0d0
          do 2 j=1,nfinal
2         prod=prod+b(i,j)*cv(j)
3         a(i)=sc
      return
      end
```

9°. Підпрограми обчислення альтернативних інтегральних ядер (1.32-1.34)

(наведені лише для перших трьох ядер) :

$$K_1(x_i,h)=\frac{\Delta t}{4\pi}\cdot\sum_{j=1}^{m}\left(\operatorname{ch}\frac{\pi t_j}{2h}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{1}{h^2+\left(x_i-t_j\right)^2}+\frac{1}{h^2+\left(x_i+t_j\right)^2}\right),\quad m=\operatorname{int}\left[2h\alpha_0/\pi\Delta t\right],$$

$$K_2(x_i,h)=\frac{\Delta t}{\pi}\cdot\sum_{j=1}^{m_0}\sum_{k=1}^{m}\frac{\cos\frac{\pi\left(\left(j-1\right)+\left(2k-1\right)\right)}{2m}\left(i-1\right)\Delta x}{1+e^{\frac{2\pi\left(\left(j-1\right)+\left(2k-1\right)\right)}{2m}}},$$

$$K_3(x_i,h)=\frac{\Delta t}{\pi}\cdot\sum_{j=1}^{m_0}\sum_{k=1}^{m}\frac{e^{-\pi\left(n+\frac{2k-1}{m}\right)\cdot h}}{e^{\pi\left(n+\frac{2k-1}{m}\right)\cdot h}+e^{-\pi\left(n+\frac{2k-1}{m}\right)\cdot h}}\cdot\cos\pi\cdot\left(n+\frac{2k-1}{m}\right)x_i\,,\quad m_0=\operatorname{int}\left[\alpha_0/\pi h\right]$$

$$K_4(x_i,h)=\frac{2h}{\pi}\cdot\sum_{k=1}^{m}\frac{4k\cdot(4k-2)-x_i^2}{\left[x_i^2+(4k-2)h^2\right]\cdot\left[x_i^2+(4k)^2h^2\right]},\quad K_5(x,h)=\frac{1}{\pi}\int_0^a\frac{\cos xt}{1+e^{2ht}}\,dt$$

```
subroutine core1 (len,n,mm,kol,istep,dx,cp,cs,dy,K)
  implicit double precision (a-h,oz)
double precision K(40),csp,dx,dy,pi,r,r1,r2,x,tj,sum
 data pi/3.151592653589793d0/
   do 5 m=100, mm, istep
        dy=110.0d0/m
        do 2 i=1,kol
        is=i-1
        csp=0.0d0
          do 1 j=1,m
          x=(1.0d0*j-0.5d0)*dy
      r=(pi*x)*0.5d0/h
      r1=dexp(r)
          r2=dexp(-r)
          r=1.0d0/(r1+r2)
          r1=1.0d0/(1.0d0+(is*dx-x)**2)
          r2=1.0d0/(1.0d0+(is*dx+x)**2)
          scp=csp+r*(r1+r2)
          K(i)=csp*dy/(2*pi)
        K(kol+1)=dlog(2.0d0)/(2*pi)
        return
  end
```

```
subroutine core2 (len,n,mm,kol,istep,dx,cp,cs,dy,K)
    implicit double precision (a-h,oz)
        ..........................................
        do 6 m=100,mm
        dy=pi/m
          do 3 i=1,kol
          is=i-1
          sum=0.0d0
            do 4 j=1,26
            n=j-1
            do 4 l=1.m
            tj=pi*(n+1.0d0*(2*l-1)/(2*m))
            r=is*dx*tj
            r1=2*tj*h
            sum=sum+dcos(r)/(1.0d0+dexp(r1))
        K(i)=dy*sum/pi
        K(kol+1)=dlog(2.0d0)/(2*pi)
        return
  end
```

```
subroutine core3 (len,n,mm,kol,istep,dx,cp,cs,dy,K)
   implicit double precision (a-h,oz)
        ..................................................
        do 3 m=100,mm,istep
        dely=pi/m
          do 2 i=1,kol
          is=i-1
          sum=0.0d0
            do 1 j=1,m
            n=j-1
            do 1 l=1,m
            tj=pi*(n+1.0d0*(2*l-1))/(2*m))
            r=dexp(tj)
            s=dexp(-tj)
            r=s/(r+s)
            s=is*delx*tj
            sum=sum+r*dcos(s)
          K(i)=sum*dely/pi
          K(kol+1)=dlog(2.0d0)/(2*pi)
          return
    end
```

КОМЕНТАРІ

I. НАРИС ІСТОРІЇ ДОСЛІДЖЕННЯ КОНТАКТНИХ ЗАДАЧ

Дана робота продовжує серію праць, присвячених функціонально-аналітичному напрямку у розв'язанні задач структурної гравіметрії, які займають чільне місце в інтерпретації потенціальних полів і користуються заслуженою увагою понад 70 років. Основою роботи є дослідження оберненої лінеаризованої задачі потенціалу для однієї контактної поверхні з класу неперервних разом із першими похідними функцій контакту, зірчастих щодо нескінченно віддаленої точки, у постановці, особливо важливій для геофізичної практики: точки спостережень розташовано на досить гладкій поверхні, а аномалії задано на *істотно обмежених* множинах як значення вертикальної похідної потенціалу тяжіння аномальних мас, розташованих під поверхнею спостережень. У численній літературі з проблем обернених задач для контакту зустрічаємо розмаїття їх описів. Досі не було з'ясовано, з чим це пов'язано: чи то з неозорою множиною моделей задачі, чи з проблемами її розв'язання (теоретичного чи чисельного). Відповідь на це питання дає наведений у першому розділі дисертації детальний аналіз постановок задачі та методів їх розв'язання. Цей якісний аналіз обмежено лише основними працями, що проливають світло на стан вивченості математичних моделей контактної задачі.

Витоки постановки оберненої задачі визначення контакту зароджуються з теорії знаходження форми тіла за його зовнішнім потенціалом, основи якої закладено у працях І. Ньютона, А. Клеро, Дж. Стокса і А. Пуанкаре. Формально контактна задача має таку постановку: за заданим полем g та відомою постійною щільністю $\sigma = \sigma_2 - \sigma_1$ визначити положення контактної поверхні L, описаної рівнянням $\zeta(\xi)$. Її чітку математичну трактовку отримано лише у 30-х рр. XX ст. Саме відтоді почався розвиток теорії обернених задач для контакту, який можна поділити на три етапи. Відповідно, відомо три основні постановки оберненої задачі гравіметрії для контактної поверхні. Їх особливості та схематичне зображення висвітлено в п. 1.1.2 дисертації. Пригадаймо основні віхи для повноти опису.

1. Перший етап розпочався із праці Б.В. Нумерова [64], у якій вперше сформульовано і наближено розв'язано задачу визначення контактної границі двох однорідних середовищ різної густини через вирішення нелінійного інтегрального рівняння (1.12_1), залежного від *середньої глибини* h, та загалом окреслено клас функцій, на якому його розв'язок задовільно апроксимується розв'язком лінійного інтегрального рівняння (1.23_2). Заснований Нумеровим напрям продовжили М.Р. Малкін [56] стосовно косонамагнічених мас і О.К. Сенько [76], який уточнив наближення Нумерова. Згодом О.О. Заморєв [35], відкинувши складову $2\pi\gamma\sigma h$, отримав точне обернення оператора рівняння (1.12_1) за умови, що *контактна границя є*

скінченною ундуляцією прямої на скінченному інтервалі. До речі, *ефективність цього обернення при розв'язку практичних задач досі не перевірено*. На чисельних прикладах його частково підтверджує повідомлення [14].

Принципова відміна моделей Заморєва і Нумерова полягає у інтервалі задання шуканої функції контакту $\zeta(\xi)$: у першій моделі ця величина фінітна і задана як ундуляція на скінченному інтервалі $[a,b]$, до того ж належить локалізованому тілу, тоді як у другій моделі інтервал витягнуто уздовж осі Ox , а аномальну масу, що міститься між віссю Ox та контактом $\zeta(\xi)$, розбито надвоє – горизонтальний плоскопаралельний шар потужністю h та область між площиною $z = h$ і поверхнею контакту. Таке зображення дає безсумнівні теоретичні зручності, тоді як штучне обмеження Заморєва не дозволяє звузити множину еквівалентності розв'язків. Через це класичні методи для вивчення контактів у загальному випадку непридатні. У межах третьої постановки шукану контактну поверхню $\zeta(\xi)$ апроксимують ламаною, задаючи набір одиничних тіл певної форми [83].

О.О. Шванк [144, с. 73] зауважив: якщо замість відомої глибини h до контакту підставити значення невідомого контакту $\zeta(x),\ x \in R^{(1)}$ у фіксованій точці x, то з виразу (1.12_1) виходить нове інтегральне рівняння[53] для контакту (1.4). Але він не довів справедливість такої заміни і це зауваження пройшло повз увагу геофізиків, оскільки вся наступна бібліографія свідчить про домінуючу трактовку контактної задачі у наближеній *лінеаризованій* трактовці О.О. Заморєва[54]. У вищеназваних працях та праці О.К. Маловичка [57] було в основному сформовано методологію постановки і розв'язання обернених контактних задач. Чисельному вирішенню лінеаризованого наближення Нумерова присвячено праці Б.О. Андреєва [5], М.Р. Малкіна [56] і О.К. Сенька [76], а Маловичко [58] об'єднав підходи Сенька і Нумерова в єдиний процес ітерацій.

Постановка прикладної геофізичної задачі передбачає можливість її розв'язання, для чого слід вирішити проблеми єдиності і стійкості розв'язку. Різні грані цих проблем свого часу вивчали М.О. Алексідзе [3] , Б.О. Андреєв [4, 5], Г.І. Каратаєв [33, 46], В.М. Новоселицький [63] та інші. У 1980-х роках А.В. Чорний [146] вперше при розгляді тіл типу шару застосував перетворення Кельвіна необмеженої смуги, що містить шукані границі, в обмежену фігуру. Згодом у [147] він узагальнив цей підхід та ідеї Новікова [62] і Тодорова з Зідаровим [123] в

---

53 У праці [85], яка започаткувала етап поглибленого аналізу задачі в постановці Шванка, узагальнено рівняння (1.4) і (1.18) на основі аналізу ситуацій, що виникають за різних значеннь координати *z*.

54 Лише через 40 років його просторовий аналог було повторно виведено у праці *Цирульский А.В., Никонова Ф.И., Фельдман С.И.* О численном решении прямых задач гравиметрии для сложных слоистых сред // Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли. – 1987. – № 4. С. 46-55. Там же опубліковано розв'язок рівняння (2) з [94, с. 50] для просторового випадку, хоча вперше його розглянуто у праці [66].

уніфікованому методі доведення глобальних теорем єдиності розв'язків. Суть методу – в оцінці певного характеристичного функціоналу (отриманого на основі відомої тотожності Гріна), який зображає рівність зовнішніх потенціалів і густин тіла, що не породжує зовнішнього потенціалу. Його значення на певній гармонічній функції в об'єднанні областей, що викликають рівні потенціали, оцінюють істину твердження. Необхідно також згадати спроби М.Г. Сербуленка [33, 77] і Ю.В. Антонова [7, 8, 120] вирішувати задачу для серії границь розділу однорідних пластів та О.І. Кобрунова і Р.П. Денисюка [48] – ту ж задачу для серії границь поділу неоднорідних комплексів[55]. Це підштовхнуло виконання ряду робіт із розділення полів від кожної з границь [7, 8, 77, 79, 103, 107, 129], що є не менш складним завданням.

Перші надійні результати чисельного розв'язку нелінійного інтегрального рівняння контакту співпали із періодом повного освоєння методу регуляризації розв'язків некоректно поставлених задач і освітлені у працях В.Б. Гласко [24-27], С.В. Захарова [38], К.О. Мудрецової [60, 61], С.М. Оганесяна [65], В.І. Старостенка [83][56]. Обернену задачу для контактних поверхонь як типово некоректну розглядали також автори праць [51, 116, 130], а у Є.Г. Булаха [17, 18] її зведено до мінімізації багатопараметричного функціоналу. Позитивний досвід розв'язання задачі для кількох контактів запропоновано в [83, 84], а розв'язок у площадному варіанті в [19]. Освоєння методів розв'язку некоректних задач [28, 41, 50, 59, 122] дало можливість В. Б. Гласко [24] отримати чисельний розв'язок нелінійного рівняння контакту з класу, дослідженого Заморєвим.

2. Нові горизонти у дослідженні плоскої теорії потенціалу відкрито з освоєнням на початку 60-х рр. XX ст. методів теорії функцій комплексної змінної у працях В.К. Іванова [39, 40], В.М. Страхова [103-113, 116], О.В. Цирульського [134-136], Я.Г. Голіздри [33], С.В. Шалаєва [155], В.Г. Чередніченка [139] та інших. В.М. Страхов [103, 109] довів єдиність розв'язку виведеного ним нелінійного інтегрального рівняння для контакту у комплексній області, звівши задачу до побудови допоміжної функції, яка конформно і однолистно відображає нижню напівплощину деякої комплексної площини на область під шуканою кривою. Цей підхід, узагальнивши метод В.К. Іванова [39] для однорідно розподілених у скінченних однозв'язних областях джерел, дозволив О.В. Цирульському [135] отримати

[55] Останнім часом Р.П. Денисюк [31] розглянув проблему визначення контакту за довільної зміни щільності пластів не лише у горизонтальному напрямі, але й лінійної – по вертикалі.

[56] У них та в працях А.Х. Остромогильського [68], В.Г. Філатова [119], Т.В. Балк [14], В.М. Ісакова [44], О.І. Прилєпка [71], Л.М. Сретенського [82], В.М. Страхова [102-104, 111], І.Т. Тодорова й Д.П. Зідарова [123], О.В. Цирульського [132-137] та інших було введено обмеження однозначної розв`язуваності рівняння і доповнено умови, яким повинен задовольняти стабілізатор задачі залежно від характеру вхідних даних, структури множини шуканих рішень, тощо.

згодом розв'язок задачі у скінченному вигляді, а В.Г. Чередніченку [128] – розв'язок "*в малому*". Недоліками цих побудов є використання конформних відображень, що не мають просторових аналогів, та "двопараметрична неоднозначність" – *для однозначного визначення положення контакту слід задати не лише перепад густини на контакті, а й положення його апсимптоти* [108]. Деталі цих побудов виходять за рамки дисертації. Попри безсумнівні успіхи в комплексній області, у [112] зауважено ще багато невирішених проблем, що складатимуть основу майбутніх досліджень.

3. Третій етап вивчення контактної задачі знаменується активним застосу ванням набутків теорії вирішення некоректних задач та обчислювальних технологій, адекватних вимогам сьогодення. Задачі першого етапу тут вирішують на якісно і кількісно новому рівні, про що свідчать праці Р.П. Денисюка [31], О.І. Кобрунова [47], В.М. Страхова [119], Ю.В. Антонова [9], М.О. Якимчука [158]. Серед інших виділимо повідомлення А.В. Чорного [85, 93, 94], у яких доведено, що клас, введений Нумеровим, не забезпечує однозначної розв'язуваності розглянутих рівнянь (натомість вона забезпечується на класі, який окрім вимог апроксимації [109, 113], повинен бути підмножиною множини коректності) та виведено нелінійне інтегральне рівняння для контакту у евклідових просторах $R^{(n)}$, $n = 2{,}3$ на загальнішому класі[57] порівняно з вивченим у [103] і досліджено його коректність. Незаперечною перевагою цих побудов є узагальнення контактної задачі на основі зауваження О.О. Шванка [157, с. 72] та простота вивчення умов коректності задачі. До контактних задач у структурній гравіметрії відносять і задачу визначення форми тіла за його зовнішнім потенціалом за умов його близькості у деякій метриці до зовнішнього потенціалу заданого тіла, сформульовану Л. Ліхтенштейном. Значною мірою її розробку завершено в праці О. А. Чорної [140] виводом і розв'язанням нелінійного інтегрального рівняння у вигляді послідовності рішень лінійних інтегральних рівнянь 1-го роду без обмежень на розмірність простору. Питання єдиності і існування розв'язку контактної задачі з різними обмеженнями на аномальні області вивчали П. С. Новіков [62], Л.М. Сретенський [82], І.М. Рапопорт [73] та інші.

У праці Н.Н. Чорної [131] проблему відновлення контактної поверхні за значеннями логарифмічного потенціалу зведено до нелінійного інтегрального рівняння (1.4), яке зв'язує функцію контакту з гармонічною функцією аномального поля. Його ізюминкою є подання у вигляді рівняння 2-го роду з домінуючою складовою, що описує поведінку густинної границі. Доведено коректність за Тихоновим розв'язку цієї задачі на класі Страхова і запропоновано

---

57 Названогму згодом структурним класом Страхова [142].

два способи обчислень за наявності перешкод. Дослідження В.І. Старостенка, Н.Н. Чорної і А.В. Чорного [87, 88 ,91-94, 101] та Ю.І. Дубовенка [148-150], у яких узагальнено опис контактних границь, розроблено стійкі чисельні алгоритми їх визначення, і в тому числі, виведено лінеаризоване інтегральне рівняння, назване ім'ям Нумерова, покладено в основу нового способу визначення контактної границі за полем, заданим на *істотно обмежених множинах*.

Лінеаризована постановка контактної задачі передбачає *малість коливань контакту порівняно з глибиною його залягання* і пов'язана з обчисленням значень похідних $V_z(x,0)$ відносно варіацій параметрів середовища. Розв'язок лінійної задачі на спеціально виділеному класі Нумерова $Nu^{(1,\alpha)}(1,D)$ *єдиним чином* визначається розв'язками ряду лінійних інтегральних рівнянь 1-го роду, чим внесено принципове уточнення у результат праці [64]. З часів Нумерова виконано велетенський обсяг досліджень контактних задач у різних постановках, але до створення завершеної теорії ще далеко.

Задачі відновлення однієї контактної поверхні розв'язують переважно у рамках методів підбору. У праці [17], наприклад, розв'язок відшукують способом градієнтного спуску у метриці L_2 як набір уступів. Проте О.І. Кобрунов доводить, що навіть за порівняно простих ситуацій такий розв'язок буває неадекватним реальній геології через прояв гармонічних властивостей поля. *Змістовність апроксимації щодо істинного розв'язку та його єдиність на класі єдиності не обумовлює геологічної змістовності допусимого розв'язку* [47]. В умовах апріорного формування апроксимацій подібні ефекти некеровані і наростають з ускладненням цих апроксимацій.

1.1. У першому розділі, окрім постановки задачі і необхідних для правиль ного розуміння і дослідження її властивостей відомостей із суміжних дисциплін [16, 22, 45, 50, 74, 83, 124] висвітлено існуючі моделі контактної задачі. Принципова відміна постановок Б.В. Нумерова [64] і поточної та, що у виведеному в [142] нелінійному інтегральному рівнянні (1.15) позаінтегральний член[58] є значенням шуканої функції у тій фіксованій точці осі, у якій беруть значення відомої функції – правої частини рівняння, тоді як у рівнянні Нумерова (1.12_1) позаінтегральний член – параметр h обрано без зв'язку із значенням правої частини, через що розв'язок залежить від нього. У [142] та у даній роботі цю залежність знято. Вказано і інші переваги лінеаризованого рівняння – простоту досліджень множин коректності і умов розв'язності як наслідок зручого подання інтегральних рівнянь ($1.23_{1,2}$).

1.2. Відомо [92, 103], що алгоритми наближеного обчислення контактної поверхні на

---

[58] Він описує поведінку контакту і домінує за нормою над другим; вигода такого подання виявляється при співставленні доведень стійкості розв`язків в [93] і теорем 2.3, 2.5 цієї роботи та загального рівняння 1-го роду [55].

базі інтегральних перетворень із швидко спадаючими ядрами ефективніші за алгоритми з інтегралом Пуассона. Ці перетворення отримують по-різному, та всі вони є частинним випадком інтегралу Шварца для смуги [92]. На основі отриманих там виразів із швидкоспадними ядрами запропоновано нові лінеаризовані інтегральні рівняння (1.30) і (1.42), які дозволяють відновлювати значення контакту за полем, заданим на *істотно обмежених множинах*.

1.3. Питання еквівалентності розв'язків досить детально висвітлено у праці [146], матеріал якої використано при написанні цього пункту. Окремо підсумовано основні властивості лінійних операторів рівнянь (1.23_2) та вперше першого із рівнянь системи (1.30), на основі яких охарактеризовано структуру цих операторів за методикою, розробленою у [140]. Доведено єдиність (теорема 2.1) і стійкість розв'язку контактної задачі (1.47). Основу першого розділу складають матеріали праць [87, 92, 142, 146]. Фізичну постановку задачі завершено побудовою інтегральних рівнянь, а наступні розділи трактують її математичну сторону, що зводиться до проблем їх коректності та чисельного розв'язання.

Другий розділ роботи стосується питань розв'язності отриманих рівнянь на основі ітераційних процесів [88, с. *3,6*], [94, с. *74,75*].

2.1. Б.В. Нумеров запропонував лінеаризацію рівняння (1.12_1) у вигляді (1.23_2), але не обґрунтував її. У працях Х. Рейнбоя [165] і О.О. Заморєва [35-37] *лінеаризовану* постановку задачі трактовано як задачу аналітичного продовження поля у горизонтальну смугу між поверхнею спостережень і тяжіючими масами. *Математично обидві проблеми еквівалентні одна одній* і зводяться до розв'язання одного і того ж лінійного інтегрального рівняння. Позаяк через аналітичне продовження вирішують ширше коло питань інтерпретації аномалій, аніж через розв'язок структурної задачі, воно має розвинутий аналітичний апарат [1-6, 12, 23, 29, 33, 51, 79, 102, 117, 133, 158, 162] (у [154] навіть опубліковано алгоритм "*апроксимаційного*" продовження поля). На цій підставі поставлену лінійну задачу для контакту трактують як задачу аналітичного продовження (2.2).

2.2. Для уточнення чисельного розв'язку нумерівського наближення використано у новій трактовці ранні результати Б.О. Андреєва [5], М.Р. Малкіна [56] і О.К. Сенька [76]. Пропозицію Малкіна відповідно скориговано, а пропозицію Сенька переформульовано щодо умов рівнянь (1.4) і (1.23_1) [152]. Нині ці результати не мають високої цінності, слугуючи як аналітичні апроксимації поля і відбиваючи перші кроки розвитку лінеаризованої постановки структурної задачі. Принагідно у [149] уперше проаналізовано формулу Андреєва (2.5) і доведено, що наближення Нумерова (2.11), Х'юза (2.12) і Страхова (2.13) є її *частинними випадками*. Для практичних обчислень запропоновано поліпшені варіанти відповідних

наближень (2.14).

Узагальнення у рамках теорії узагальнених функцій ідей і методів Нумерова [64] і О.К. Маловичка [58] логічно призвело до появи нового способу розв’язання контактної задачі (2.5), названого їх іменами. За своїм змістом він виходить за рамки лінеаризованої постановки, але тісно зв’язаний із вищевказаними дослідженнями. Основні результати дослідження нового способу відбито у теоремі 2.3. Через те, що ітераційний процес Нумерова-Маловичка – це два вкладені один в один цикли, у кожному з яких розв’язують рівняння різного типу, швидкість збіжності послідовних наближень (2.21) нерівномірна. Про це свідчать і модельні приклади – у внутрішньому циклі її оцінено величиною $c_0/(n+2)$, а в зовнішньому – $c_1/\left(1-h^-/h^+\right)$, де c_0, c_1 – деякі константи, $h^-=\inf\zeta(x)$, $h^+=\sup\zeta(x)$, $x\in R^{(1)}$, n – порядковий номер наближення. Це дещо знижує стійкість і точність ітерацій.

2.3. Питання коректного розв’язання некоректних задач досі зберігають актуальність. При їх дослідженні автор орієнтується на постулат В.П. Маслова [55] про те, що збіжність розв’язку регуляризованого ітераційного процесу свідчить про існування розв’язку, хоч і усвідомлює, що реалізація методу регуляризації не завжди буває адекватною. Саме у такому ключі досліджено збіжність ітераційного процесу Лаврентьєва-Андреєва (2. 5) для вирішення задачі (2.2). Назва зумовлена тим, що Андреєв [4] запропонував процес ітерацій для обчислення задачі Нумерова, а Лаврентьєв [50] обґрунтував його застосовність для операторних рівнянь 1-го роду. На відміну від Андреєва і Лаврентьєва, збіжність процесу доведено по-новому, на основі зручного подання (2.25) процесу через узагальнені функції [21, 124] (еквівалентне перетворення (2.24)), що дозволило:

а) легко визначити швидкість збіжності послідовних наближень;

б) знайти *модуль неперервності* оберненого оператора рівняння для контакту;

Додатково до [4, 51] виявлено обернену залежність збіжності наближень від глибини занурення h шуканого контакту $\zeta(x)$. Цю ідею поширено на дослідження збіжності інших ітерацій.

2.4. Метод (2.5) розв’язання лінеаризованої задачі для контакту істотно залежить, крім густини σ, від штучно внесеного параметра h. Деталі цієї залежності вивчали В.М. Страхов [110, 114], Н.Н. Чорна [142]. Наразі подано узагальнений ітераційний процес (2.30) для визначення розв’язку рівняння (1.23_1) із ядром Пуассона, незалежного від параметра h [148]. Для доведення його збіжності застосовано уже згаданий метод еквівалентного подання, розроблений у праці [32] на основі відомих співвідношень [29].

2.5. Щоб надійно відновити контакт за “пуассонівськими” ітераціями, слід попередньо здійснити екстраполяцію виміряних на *коротких* профілях значень поля на майже

нескінченний інтервал. Для цього запропоновано чисельно стійкий і швидкозбіжний метод (2.34). Його випробування на тестових прикладах забезпечило задовільну точність.

3. У практичних задачах визначення *фраґменту контактної границі* в лінійному наближенні за даними вимірів на істотно коротких профілях виникають рівняння 1-го роду з ядрами, що швидко спадають. Наближений розв'язок рівняння (1.23_2) за цих умов не задовольняє нас через низьку точність, зумовлену головно повільним спаданням ядра Пуассона з ростом параметра x. Таку особливість зазначав ще Страхов [104, 109], вказавши спосіб подолання труднощів. Стосовно до нашої задачі він зводиться до визначення допоміжної функції $S(x,h)$ з рівняння типу (1.41) із швидко затухаючим з ростом x ядром і наступного обчислення контакту за виразом (1.39). Тут ефективно застосовано вже згаданий спосіб доведення збіжності ітераційних процесів.

3.1. Через еквівалентне перетворення (3.2) подано ітераційний процес (3.1) Лаврентьєва-Чорного для визначення розв'язку рівняння (1.30) з ядром Шварца, залежного від параметра h. З наведених формул очевидно: *для обчислень з певною точністю допоміжної функції можна обмежитись заданням граничної функції $v(x)$ на короткому профілі, а при визначенні контакту $\zeta(x;h)$ з тією ж точністю таких даних уже недостатньо*. Згаданий процес наближень описано давно та питання його збіжності досі лишалось відкритим. Виявлено, що швидкість збіжності процесу переважає швидкість збіжності процесу Лаврентьєва-Андреєва не більш, ніж удвічі, але в нього є інша перевага – *для отримання аналітично продовжених значень поля з певною точністю у першому методі потрібно знати вихідне поле на коротшому інтервалі*, аніж в другому.

3.2. Так само через еквівалентне перетворення (3.4) доведено збіжність узагальнених ітерацій (3.3) з ядром Шварца для розв'язання рівняння (1.42), а також (3.5) і (3.6) – для розв'язання рівнянь (1.44) і (1.45). Для повного вирішення проблеми слід вирішувати не одне, а систему інтегральних рівнянь (1.42). Питання розв'язності системи (1.42) вирішене частково – для першого з рівнянь у вигляді процесу ітерацій Лаврентьєва-Чорного[59]. При дослідженні ітераційних процесів (3.4), (3.6) та їх h-аналогів вияснено умови існування розв'язків[60] (теореми 3.1 і 3.2), що має важливе методологічне значення, оскільки глобальних критеріїв їх існування не знайдено з часів Пуанкаре попри зусилля видатних вчених – І. М. Раппопорта [73] В.М. Новоселицького [63], О.І. Прилєпка [70, 71], О.І. Кобрунова [47] та інших. В силу

[59] Назву введено з тих же міркувань, що й для попереднього процесу ітерацій Лаврентьєва-Андреєва.
[60] Зроблено це простими засобами завдяки особливому зображенню рівняння, даному в описі мат. моделі.

властивих гармонічним наближенням[61] обмежень [1,151] область застосування розвинутих алгоритмів обмежена рамками гравірозвідки.

3.3. Строго обґрунтовано структуру множини єдиності розв'язків задачі і її стійкість на класі Нумерова, виходячи з властивостей відповідних лінійних операторів. Ідея прискорення збіжності ітерацій при обчисленні на ПК не нова [50, 53], але найефективніший, скажімо навіть, елеґантний її варіант згадано у [146]. Саме його покладено в основу способу прискорення збіжності усіх ітераційних процесів, пропонованого автором. Величину прискорення, як і у [50], ілюструє приклад.

4. У четвертому розділі основну увагу приділено скінченновимірній апроксимації і побудові оптимальних за точністю регуляризуючих алгоритмів розв'язання на основі витокоподібного подання сигналу і перешкод [149].

4.1. Стратегію розв'язання лінійних умовно коректних задач зі збуреними перешкодами вхідними даними описано у [113], але на етапі відладження і чисельного тестування програм варто скористатись спрощеним варіантом регуляризації за Тихоновим [20] за умови його оптимізації на основі пропозицій [146]. Розглянута в роботі контактна задача (1.47) отримала замкнуте математичне оформлення і зведена до чисельного розв'язання ряду лінійних інтегральних рівнянь першого роду типу (4.2).

4.2. Скінченновимірну апроксимацію рівнянь (4.2) здійснено методом проекцій [45]. Дано оцінки похибок скінченновимірної апроксимації і досліджено її якість за принципами, запозиченими із праці [150].

4.3. Регуляризуючі алгоритми засновано на традиційних підходах [3, 13, 16, 83, 122] з урахуванням скінченного числа вхідних даних і їх похибок [143-145]. В остаточному підсумку інтерпретації слід, на нашу думку, враховувати зміни загальних уявлень про розв'язок некоректних задач, відображені у [113-119].

Оптимальні наближення на довгому профілі відшукуємо згідно правила (4.13), а на короткому – з виразу (4.14), причому збіжність останнього проілюстровано лише чисельно (табл. 4.1). Задля підвищення чисельної стійкості (а, отже, й точності) алгоритмів пропонується застосувати методику чисельної дорегуляризації [145].

4.4. Чисельну реалізацію стійких алгоритмів зведено до вирішення систем лінійних алгебраїчних рівнянь для розв'язання інтегральних рівнянь 1-го роду. З аналізу цієї проблеми створено пакет стійких до похибок програм, які дають можливість *передбачити поведінку*

---

61 "*...Для повнішого опису значень поля сили тяжіння неможливо отримати лінійне диференційне рівняння якщо невідома форма й щільність збурюючих мас*" [136], тому доводиться використовувати для цього гармонічне наближення; це в повній мірі стосується й контакту.

густинних контактів, але не пояснити її причину. Наведено узагальнений покроковий опис чисельних алгоритмів з обрахунком затрат обчислень (рис. 4.3) і результати застосування програм до ряду тестових задач; зокрема, детально вивчено поведінку інтегральних ядер типу Шварца (рис. 4.4-4.7). Відзначено їх суттєву залежність від осциляції ядер та способу інтегрування. Для перевірки ефективності створеного комплексу програм здійснено порівняння його з результатами дії іншого комплексу [122] на тих же тестових даних (рис. 4.12-4.17). Результати такого порівняння виявили, що класичні методи Нумерова і Маловичка знаходження контакту малоефективні через залежність від багатьох параметрів чисельних схем (чисельно нестійкі), в той час, як наближення (2.24) і (3.1) та їх узагальнені аналоги забезпечують прийнятну точність навіть при збуреному 5%-ною похибкою полі (рис. 4.17-4.21).

4.5. Через недосконалість модельного підходу до вивчення складних геологічних явищ допущено багато спрощень, які можуть не виконувативатись на практиці. Через складність технічної реалізації опущено обчислення деяких аналітичних формул. Окремі невирішені питання потребують подальшого вивчення.

II. РОЗВ'ЯЗАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ 1-ГО РОДУ

1. Класична стратегія розв'язання некоректних задач

$$A\zeta(x) = u\,, \qquad \text{(II.1)}$$

що зводяться до інтегральних рівнянь 1-го роду, передбачає використання різних модифікацій методу послідовних наближень [*а-є, м*][*], який вписується у загальну схему стискаючих відображень Банаха. Вперше для розв'язання таких задач типу аналітичного продовження гармонічної функції[62] найпростіший варіант методу ітерацій використав Б.О. Андреєв [4], а в більш загальному вигляді – О.К. Маловичко [58] та інші, але без обґрунтування застосовності методу для розв'язку задач за *наближеними* вхідними даними. Такі задачі, як правило, зводять до *рівнянь з цілком неперервними операторами*, що мають нестійкі розв'язки. Застосування методу ітерацій для таких рівнянь обґрунтував М.М. Лаврентьєв [51], виділивши за допомогою модуля неперервності $\omega(n, A^{-1})$ оберненого оператора (n – число ітерацій) *множину коректності* розв'язку. За ефективний розв'язок рівняння зі збуреною правою частиною з ітераційної послідовності обирають функкцію з номером n_δ, на якому мінімізується "нев'язка"

$$\omega(n, A^{-1}) + n\delta, \quad \delta = \|\delta u\| > 0\,.$$

Цей підхід справедливий і для задач, зведених до розв'язання погано обумовлених

---

[*] Мається на увазі література, наведена наприкінці цього коментаря.

[62] У рамках методу підбору отримано аналітичні розв`язки задач цього типу [56, 58] і задачі визначення контакту двох середовищ [36], але без чисельної реалізації.

систем рівнянь. За явного виразу цілком неперервного оператора $\mathbf{A}^0$, який окреслює множину *можливих розв'язків* задачі (II.1), чи множини його *власних векторів* неважко збудувати модуль неперервності та для погано обумовлених систем лінійних алгебраїчних рівнянь це – складна проблема. Ці обмеження знято у працях В.К. Іванова [39-41] і А.М. Тихонова [122]. В.К. Іванов замість точного розв'язку системи (II.1) відшукував у певній метриці *найкраще наближення* до нього, хоч для цього потрібен не менший обсяг інформації, аніж для побудови модуля неперервності $\omega(n, A^{-1})$. А.М. Тихонов замість точного відшукував *нормальний розв'язок* системи[63] (1) шляхом побудови регуляризуючих операторів вигляду

$$\{A^+_{\alpha_n}\},\ \ A^+_\alpha = \left(A^* A + \alpha E\right)^{-1} A^*,\ \alpha > 0.$$

Для відшукання наближеного розв'язку нестійкої задачі (1) зі збуреними вхідними даними $(\widetilde{\mathbf{A}}, \widetilde{u})$, де $\|\widetilde{\mathbf{A}} - \mathrm{A}\| \le \delta,\ \|\widetilde{u} - u\| \le \delta$, визначають екстремаль $\widetilde{\zeta}_\alpha$ опуклого квадратичного функціоналу

$$\Phi_\alpha(\zeta, \widetilde{u}, \widetilde{A}) = 10\delta^2 \left\| 1 + \|\zeta_0\| \right\|^2 + \alpha\|\zeta_0\|^2 = \|A\zeta - u\|^2 + \alpha\|\zeta_0\|^2, \qquad \text{(II.2)}$$

яка найкращим чином, згідно точності вхідних даних, апроксимує *нормальний розв'язок* x_0 початкової "точної" системи рівнянь (II.1). Способи Лаврентьєва, Іванова і Тихонова [*г*, *и-ї*, *к*] відрізняються, по-суті, лише підходами до знаходження параметра $\alpha > 0$, що забезпечує отримання з ґарантованою точністю наближеного розв'язку (II.1) шляхом мінімізації згладжувального функціоналу $\Phi_\alpha(\zeta)$ на деякій спадаючій послідовності $\{\alpha_n\}$ чисел α_n, визначеній за принципом нев'язки $\|\widetilde{A} \cdot \zeta_\alpha - \widetilde{u}\| \le \delta$. Остаточний вибір регуляризуючого оператора $A^+_{\alpha_0}$ (параметра α_0) здійснюють на основі деяких критеріїв узгодження точності розв'язку з похибками вхідних даних.

А втім, *для реалізації принципу нев'язки*[64] *необхідно знати не лише оцінку збурень оператора і правої частини рівняння (1), а і оцінку норми нормального розв'язку чи норми проекції вектора* $\widetilde{u}$ *на ядро оператора* $\widetilde{A}$ [28]. У той же час є алгоритм [р, с. 230], що дозволяє надійно визначити параметр регуляризації α за умови належності вектора $\widetilde{u}$ до образу оператора $\overset{0}{A}$ за співвідношенням

$$\beta_{n+1} = \beta_n + \left(\left\|\widetilde{A}\zeta_{\beta_n} - \widetilde{u}\right\|^2 / \delta \right) \left(\delta - \left\|\widetilde{A}\zeta_{\beta_n} - \widetilde{u}\right\| \Big/ \left(\widetilde{A}\frac{d\widetilde{\zeta}_{\beta_n}}{d\beta}, \widetilde{A}\zeta_{\beta_n} - \widetilde{u} \right) \right),$$

$$\beta_0 = \left(\left\|\widetilde{A}\zeta_0 - \widetilde{u}\right\| - \delta \right) \Big/ \left(\left\|\widetilde{A}\right\| \left\| \frac{d\zeta_0}{d\beta} \right\| \right), \frac{d\zeta_0}{d\beta} = -\widetilde{A}^* \left(\widetilde{A}\zeta_0 - \widetilde{u} \right), \qquad \text{(II.3)}$$

---

63 Тобто границю послідовності $\{\zeta_{\alpha_n}\}$ екстремалей функціоналу $\Phi_\alpha(\zeta) = \|A\zeta - u\|^2 + \alpha\|\zeta\|^2 + \|u_\delta - u\|^2$ при $\alpha \to \infty$.

64 Принцип нев`язки не завжди дозволяє знайти найкраще наближення нестійкої задачі через накопичення при обчисленні похибок округлення; їх компенсує дорегуляризація.

де $\left\|\tilde{A}\cdot\zeta_0-\tilde{u}\right\|>\delta$, $\beta=1/\alpha$, а ζ_0 – початкове наближення, $\zeta_0=0$ або $\zeta_0=\tilde{u}$.

За явного опису компактної множини коректності задачі (II.1) відшукання *нормального розв'язку* за методом регуляризації Тихонова зводять до стійкої задачі варіаційного обчислення умовного екстремуму згладжувального функціоналу [122]. Параметр регуляризації α шукають із певного рівняння одним з чисельних методів, наприклад, Ньютона[65] [16]. За наявності повних відомостей про похибки вхідних даних, необхідних для реалізації принципу нев'язки, неважко збудувати регуляризуючий алгоритм і визначити ефективну оцінку точності розв'язку, та частіше через брак знань про похибки *практично обмежуються якісною залежністю параметра α від похибок оператора і правої частини*. Вибір остаточного розв'язку на якісній основі здійснюють "*з міркувань здорового глузду, досвіду і інтуїції*".

2. Ситуація з континуальною трактовкою алгоритмів розв'язку задач (II.1) із збуреннями значно ускладнюється при переході до прикладних аспектів[66]. Зокрема, слід відзначити інший, аніж в теорії, характер збіжності обчислювальних схем і залежність розв'язку від обсягу обчислень[67]. Крім того, регуляризацію (заміну некоректної задачі коректною) характеризує втрата стійкості розв'язку на компакті, тому актуальним є питання побудови алгоритму, *який не змінює міри стійкості* вихідної задачі на компакті. У зв'язку з цим для чисельного розв'язку СЛАР з прямокутними погано обумовленими матрицями і збуреними правими частинами запропоновано новий метод [144], що полягає у побудові лівого оберненого оператора типу Пенроуза [164] з мінімальною мірою обумовленості і поділом його спектру на великі і малі відносно міри збурення δ сингулярні числа.

Нормальний розв'язок збуреної системи рівнянь

$$\zeta(\alpha,\delta)=\left[A+\alpha\left(A_l^{-1}\right)^*\right]_l^{-1}u=L_l^{-1}u,\quad \alpha=\delta\left\|\left(A_l^{-1}\right)^*A_l^{-1}u\right\|^{-1} \qquad \text{(II.4)}$$

є проекцією розв'язку на підпростір, натягнутий на головні напрями матриці, які відповідають найбільшим сингулярним числам. Його відшукують через псевдообернений оператор L_l^{-1}. При цьому задача (II.1) фактично зводиться до обчислення такого оператора на множині *допустимих розв'язків* за заданої міри збурення правої частини δ і обмежень шуканого

---

[65] В області розв`язку функція нев`язки змінює кривизну, що ускладнює використання методу Ньютона для визначення параметра α .

[66] Теоретично еквівалентні алгоритми іноколи призводять до різних чисельних результатів, тобто залежать від технології складання програм. Щоб уникнути цього, слід використовувати апробовані алгоритми розв`язку СЛАР з математичних бібліотек, чітко визначивши необхідні обмеження з урахуванням архітектури комп`ютера .

[67] Із зменшенням параметра α послаблюється і дія стабілізатора у регуляризованій задачі; за великого рівня перешкод екстремаль згладжувального функціоналу далека від точного розв`язку (велика похибка нев`язки за малого α), тобто задача "*розрегуляризовується"*. Високий рівень перешкод забезпечують похибки округлень, що наростають з обсягом обчислень, тому навіть регуляризовані розв`язки потребують чисельної дорегуляризації.

розв'язку на зразок гладкості чи мінімальності його норми і т.п. Основне смислове навантаження в обґрунтуванні цього методу несе теорема, яку назвем іменем її творця [136] – теоремою

Чорного.

Для заданої матриці $A_{m\times n}$ *такої, що:*

1) *відома оцінка збурень* $\|\delta^i\|$ *її вектор-стовпців* a^i*, упорядкованих в порядку спадання модулів* $\|a^i\| \geq \|a^{i+1}\|,\ i = \overline{1, n-1}$*;*
2) *для перших* $r < n,\ r = rang^{(k)} A$ *з них справедливі нерівності*

$$\|a^i\| > \delta,\ \|\widetilde{U}^i\| > \delta_0,\ \delta = \max\|\delta^i\|,\ \delta_0 = \max\|\delta^i\|\|a^i\|^{-1},$$

де $\sum_{j=2}^{r} \widetilde{U}^j = \sum_{j=2}^{r}\left(\gamma^j - \sum_{i=1}^{j-1}\beta_{ij} U^i\right),\ \beta_{ij} =< U^i, \gamma^j >, U^{(1)} = \gamma^{(1)}$ *- лінійні комбінації, за допомогою яких на початковій сукупності нормованих векторів* $\gamma^i = a^i\,\|a^i\|^{-1}$ *будується послідовність ортонормованих векторів* U^i*;*

будь-яка з матриць $A_k,\ k = \overline{1, r}$*, складених із перших* $k < r$ *вектор-стовпців* $a^i,\ i = \overline{1, k}$ *має ліві обернені матриці* A_{kl}^{-1} *з мінімальною мірою обумовленості*

$$cond(A_l) = \|A_l\|\|A_l\|^{-1} = \frac{\max\limits_i \widetilde{\lambda}_i}{\min\limits_i \widetilde{\lambda}_i},\ \sum_{i=1}^{r}\widetilde{\lambda}_i = \sum_{i=1}^{r}\sqrt{\lambda_i^2},\ \text{де}\ \ \lambda_i \equiv (A^* A),\ A_l^{-1} = D^{-1}C^* L^*,\ L^*\ \text{- елемен}$$

тарна матриця обертання, D^{-1} *- діагональна,* C *- обернена до верхньої трикутної.*

За цим визначенням лівий обернений оператор серед усіх напівобернених найстійкіший на компакті до збурень вхідних даних. Умова $G_l\ A_r\ \zeta^{(0)} = 0$, де $G_l = E_m - A_r\ A_{rl}^{-1}$ – лівий анулятор для A_r, необхідна і достатня для існування єдиного і нетривіального розв'язку рівняння $A_r\ \zeta^{(0)} = u$; справедливо і зворотнє. Зауважмо, що A_l^{-1} застосовна для відшукання розв'язку перевизначених СЛАР, а для недовизначених слід застосовувати праві обернені матриці[68].

Регуляризований розв'язок $\zeta^{(0)}$ збуреного рівняння (II.1) відшукують так, щоб вектор $\zeta^{(0)}$ доставляв мінімум нев'язці $\omega(\widetilde{u}, \widetilde{A}, \widetilde{\zeta}) = \widetilde{u} - \widetilde{A}\,\widetilde{\zeta}$ за умови $\|\delta\zeta^{(0)}\|_E = \delta$.

Мінімуму нев'язці завдає однозначно визначуваний вектор $\widetilde{A}_{rl}\,\widetilde{u}$, причому маємо на увазі, що

$$\left\|\omega\left(\widetilde{u}, \widetilde{A}\left[\widetilde{A}_{rl}^{-1}\,\widetilde{u}\right]\right)\right\| = \begin{cases} 0,\ \widetilde{u} \in D^r \subset D \\ \|\widetilde{u}\|,\ \widetilde{u} \in D \setminus D^r \\ (0,\ \|\widetilde{u}\|), \widetilde{u} \in D \end{cases}, \qquad \text{(II.5)}$$

де D^r – область тяжіючих тіл, D – область нижче поверхні спостережень. По

шук розв'язку (екстремалі нев'язки) здійснюють шляхом багатоступеневої регуляризації, суть

68 Отримувані транспонуванням початкової матриці, побудовою до неї лівої оберненої і повторним ретранспонуванням.

якої поетапно зводиться до таких кроків:

а) побудова лівого оберненого до індукованого A_r оператора, який на відміну від початкового A, встановлює одно-однозначну відповідність між елементами прообразу $\widetilde{N}_A^*$ і образу $\widetilde{Q}_A = A_r \widetilde{N}_A^*$ оператора A_r та визначення наближеного розв'язку $\widetilde{\zeta}^{(0)} = A_{rl}^{-1} u,\ \widetilde{\zeta}^{(0)} \in \widetilde{N}_A^*$;

б) обмеження розв'язку $\zeta^{(0)}$ умовою $\left\|\delta\zeta^{(0)}\right\| = \delta = \|\delta u\|,\ \widetilde{u} = u + \delta u$, реалізація якої зводиться до мінімізації функціоналу $F(\delta_k) = \sum_{i=1}^{r} \left(\widetilde{\zeta}_i^{(0)}\right)^2,\ \widetilde{\zeta}_i^{(0)} = \zeta_i^{(0)} + \delta_i,\ \sum_{i=1}^{m} \delta_i^2 = \|\delta_m\|^2$,

умовний екстремум якого досягається на екстремалі, яку визначають з рівняння $\alpha_0 \left(A_{rl}^{-1}\right)^* \zeta^{(0)} + \delta_m = 0,\ \alpha_0 = \|\delta_m\| \Big/ \left\|\left(A_{rl}^{-1}\right)^* A_{rl}^{-1} u\right\|$, а з іншого боку $\zeta^{(0)}$ задовільняє рівнянню $\widetilde{A}\zeta^{(0)} = \widetilde{u}$;

в) отримання розв'язку з об'єднання цих умов за співвідношенням

$$\zeta^{(0)} = \left[A_r + \alpha_0 \left(A_{rl}^{-1}\right)^*\right]_l^{-1} u. \tag{II.6}$$

Можна будувати регуляризовані розв'язки різного порядку s гладкості:

$$\zeta(\alpha,\delta) = \left[A + \alpha \left(A_{rl}^{-1}\right)^* G\right]_l^{-1} u,\ \alpha = \delta \left\|\left(A_{rl}^{-1}\right)^* G\, A_l^{-1} u\right\|,$$

де $G > 0$ – матриця оператора чисельного диференціювання до s-го порядку; регулярний розв'язок системи при $\delta \to 0$ прагне до точного розв'язку.

Наступним етапом є відновлення втраченої при округленні точності чисел у кожній ітерації через "антиокруглюючу" регуляризацію, яка має і самостійне значення. Цей етап завжди супроводжує процедуру побудови лівого оберненого оператора і полягає у розбитті процесу обчислень A_l^{-1} на три завершених етапи, у кожному з яких за допомогою "реперних умов" вплив похибок округлень зводять нанівець. Лівий обернений оператор є добутком трьох спеціальних операторів, отриманих у процесі нормування, ортогоналізації і обернення матриць. Для зменшення впливу похибок, привнесених комп'ютером, кожен такий процес зазнає додаткової корекції:

1. *Донормування* – циклічне нормування компонент $a_{ki},\ k = \overline{1,m}$ за умовою
$a_{ki} / \|a_{ki}\| (1+\sigma) = \left(\widehat{a}_{ki} + \dot{\delta}_{ki}\right) / 1 + \sigma \le \widehat{a}_{ki} \left(1 - \sigma^2\right),\ \sigma = \max_k \left|\delta_{ki} / a_{ki}\right|,\ \delta_{ki}$ – похибка округлень.

2. *Доортогоналізація* – ортогоналізація за умовою вірності $\left|\beta_{ki}^{(1)}\right| \le 10^{-s}$ усіх, окрім, можливо, останньої, значущих цифр елементів β_{ki} трикутної матриці $\boldsymbol{B}$, де s – порядок останньої значущої цифри мінімального елемента $|\beta_{ki}|,\ i = \overline{1,k-1},\ k = \overline{1,r}$. У разі невиконання цієї умови визначають лінійну комбінацію

$$\beta_{ki}^{(1)} = -\left(e_i, e_k^{(0)}\right),\ \kappa_k^{(1)} = \sum_{j=1}^{m} \beta_{ki}^{(1)} \bar{e}_{ji} + \bar{e}_{jk}^{(0)} = \kappa_{jk},\ \beta_{kk}^{(0)} = \left\|\breve{u}_k^0\right\|,\ e_j = \left\{e_{ji}\right\},\ e_j = \{e_{ji}\},$$

потім донормовують вектор $\kappa_k^{(1)}$, що дає змогу отримати вектор $e_k^{(1)}$ і числа $-\beta_{ki}^{(1)},\ \beta_{kk}^{(1)} = \left\|\kappa_k^{(1)}\right\|;\ k$ -

ту строку матриці $\boldsymbol{B}$ уточнюють за допомогою відношення $\overline{\beta}_{kk}^{(1)} = -\beta_{ki}^{(0)} - \beta_{kk}^{(0)}\,\beta_{ki}^{(1)}$, $i = 1, k-1$, $\overline{\beta}_{kk}^{(1)} = \|\tilde{u}_k\| \|\kappa_k^{(1)}\|$. Весь цикл повторюють доти, доки на *n*-ому кроці не виконаються рівності $|\beta_{ki}^{(n)}| \le 10^{-s}$ для k-го стовпця $\bar{e}_k$ напівортогональної матриці L_r і k-ї строки матриці $\boldsymbol{B}$; індукцією за k довизначають інші вектори послідовності $\{e_k^{(n)}\}_{k=1,r}$;

3. *Уточнення взаємно обернених матриць* – уточнення матриць $\mathbf{B}_r^{-1}$ і $\mathbf{A}_{rl}^{-1}$ за умови $\widetilde{A}_{rl}^{-1} A_r = E_r - \Delta, \|\Delta\| < 1$ за схемою $A_{rl}^{-1} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \Delta^k\right) \widetilde{A}_{rl}^{-1}$, що збігаються зі швидкістю $\left\| \sum_{k=s+1}^{\infty} \Delta^k \right\| \le \|\Delta\|^{s+1} / 1 - \|\Delta\| \le q^{s+1} / 1 - q$.

Втім, існує більш швидкозбіжний процес уточнення матриць:

$$A_{kl}^{-1} = \left(E + \Delta_{k-1}\right) A_{k-1,l}^{-1},\ \Delta_{k-1} = E - A_{k-1,l}^{-1} A, \text{ де } A_{0l}^{-1} = e_{rl}^{-1}, \|\Delta\| \le q < 1$$

із швидкістю $\|A_k^{-1} - A^{-1}\| \le \|A_0^{-1}\| \cdot q^{2^k} / 1 - q$, майже на два порядки вищою попереднього процесу; тут A означає A_r, а A^{-1} – відповідно A_{rl}^{-1}. Критерій завершення рахунку обирають у вигляді $\|A_k^{-1} - A_{k-1}^{-1}\| \le \gamma \cdot 10^{-s} \sqrt{r \cdot m}$, де s – порядок останньої значущої цифри мінімального модуля елемента матриці $\widetilde{A}_{rl}^{-1}$, r – число її строк, m – число стовпців. Ця схема придатна і для уточнень оберненої матриці B_r^{-1}.

Інші методи [15, 16, 18, 20-21, 52] стійкого розв'язання погано обумовлених систем не забезпечують оптимальної точності розв'язку задачі.

ЛІТЕРАТУРА З ПИТАНЬ ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ 1-ГО РОДУ

а). *Бакушинский А.Б.* Об одном численном методе решения интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода // ЖВМиМФ. – 1965. – 5, №4 – С. 744-749.

б). *Бакушинский А.Б., Страхов В.Н.* О решении некоторых интегральных уравнений 1-го рода методом последовательных приближений // ЖВМиМФ. – 1968. – 8, №1. – С. 16-22.

в). *Иванов В.К.* О приближенном решении операторных уравнений 1-го рода // ЖВМиМФ. – 1966. – 6, №6. – С. 1089-1094.

г). *Лаврентьев М.М.* Об интегральных уравнениях 1-го рода // ДАН СССР. Сер. матем. – 1959. – 127, №1. – С. 31-33.

д). *Маланюк Л.Б., Иваницкий В.Г.* О некоторых алгоритмах приближенного решения линейных уравнений 1-го рода // Методы приближенного решения дифференциальных и интегральных уравнений. Тр. ИМ. – Киев, 1973.– С. 183-186.

е). *Марчук Г.И., Васильев В.Г.* О приближенном решении операторных уравнений 1-го рода // ДАН СССР. – 1970. – 195 , №4. – С. 733-775.

є). *Меченов А.С.* Численное решение линейных интегральных уравнений 1-го рода с помощью регуляризации // Алгоритмы и программы. – 1975. – №3. – С. 67-74.

ж). *Михлин С.Г.* Лекции по линейным интегральным уравнениям. – М.: Физматгиз, 1959. – 232 с.

з). *Михлин С.Г., Смолицкий Х.Л.* Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. СМБ. – М.: Наука, 1965. – 384 с.

и). *Морозов В.А.* О принципе невязки при решении операторных уравнений методом регуляризации // ЖВМиМФ. – 1968. – 8, №2. – С. 285-309.

і). *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. – М.: ГИФМЛ, Физматгиз, 1962. – 140 с.

ї). *Старостенко В.И., Черная Н.Н, Черный А.В.* Регулярные способы решения уравнения для контактной поверхности // ДАНУ. – Сер. Б. – 1990. – №4. – С. 26-29

й). *Страхов В.Н.* О решении интегральных уравнений методом интегральных преобразований // Сиб. мат. журн. – 1969. – 10, №6. – С. 72-81.

к). *Страхов В.Н.* Об одном методе приближенного решения линейных некорректных задач // ЖВМиМФ. – 1970. – 10, №1. – С. 204-210.

л). *Страхов В.Н.* О решении линейных некорректных задач в гильбертовом пространстве // Дифф. уравн. – 1970. – 6, №8. – С. 1489-1495.
м). *Страхов В.Н.* Метод "дробной" регуляризации при решении линейных некорректных задач гравиметрии и магнитометрии // ДАНУ. – Сер. Б. – 1987. – №3. – С. 31-37.
н). *Тихонов А.Н., Гласко В.Б.* О приближенном решении интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода // ЖВМиМФ. – 1964. – 4, №3. – С. 564-571.
о). *Худан Ю.И.* О регуляризации решений интегральных уравнений 1-го рода // ЖВМиМФ. – 1966. – 6, №4. – С. 766-769.
п). *Черная О.А.* Об устойчивых способах решения задач определения звездных областей, близких к заданным // Геофиз. журнал. – 1999. – 21, №3. – С. 100-118.
р). *Черный А.В., Черная Н.Н., Гольцев В.С.* Исследование по аналитическому продолжению модуля градиента потенциала силы тяжести: Отчет о НИР 1976-80 г. /ИГФ АН УССР. – Фонды ВИНИТИ; Инв. 955198, № гос. рег. 79 015 294. – К., 1980. – 310 с.
с). *Черный А.В., Черная Н.Н., Кислинская О.А.* Некоторые обратные задачи потенциалов, удовлетворяющих самосопряженным эллиптическим уравнениям, и их приложения в геофизике: Отчет о НИР (1991-95 г.г.) / ИГФ НАНУ. – Фонды УИНТЭИ; Инв. 0296U 000115, № гос. рег. UA 01001290P. – К., 1995. – 84 с.
т). *Phillips D.L.* A technique for the numerical solution of certain integral equations of the 1-st kind // Journ. Associat. Comput. – 1962. – 9, №1. – P. 84-97.

Це, далебі, неповний перелік, який, проте, віддзеркалює основні тенденції розвитку теорії розв'язання інтегральних (операторних) рівнянь 1-го роду, що виникають у задачах геофізики.